Formas diferenciais e aplicações em eletromagnetismo e termodinâmica

Valmir Peixôto de Souza Sobrinho

Setembro 2022

Sumário

1 Revisão de cálculo vetorial

1.1 Teorema fundamental do cálculo

Teorema 1.1 (Primeiro teorema fundamental do cálculo)**.** *Seja f uma função integrável em um intervalo $[a,b]$, c um escalar tal que $a \leqslant c \leqslant b$ e F uma função definida pela expressão*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x,\ a \leqslant x \leqslant b$$

Então $\dfrac{dF}{dx} = F'(x)$ existe para todo x em um subintervalo I de (a,b) onde f é contínua e

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Demonstração. Pela definição de derivada de uma função, temos

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

onde

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_c^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_c^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Considerando x um valor fixo, podemos fazer $f(t) = f(x) + [f(t) - f(x)]$ e então

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(x) + [f(t) - f(x)]\,\mathrm{d}t \\ &= f(x)\int_x^{x+h} \mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,\mathrm{d}t \\ &= hf(x) + \int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

de forma que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,\mathrm{d}t$$

Como f é contínua em um intervalo I, tem-se, por definição, que $\forall \epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$x - \delta < t < x + \delta \implies |f(t) - f(x)| < \epsilon \tag{1}$$

para todo x, t em I. Agora escolhendo um h tal que $x < x + h < x + \delta$, ou equivalentemente $0 < h < \delta$, a proposição (1) será válida no intervalo de integração $[x, x + h]$, no que implica

$$\left| \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, \mathrm{d}t < \int_x^{x+h} \epsilon \, \mathrm{d}t = h\epsilon$$

ou seja,

$$\frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \, \mathrm{d}t \right| < \epsilon$$

Mas essa é a definição de limite de h e é equivalente a dizer que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \, \mathrm{d}t = 0$$

Analogamente, para esse mesmo δ e ϵ, podemos escolher $h < 0$ tal que $0 < -h < \delta$, ou equivalentemente $0 < |h| < \delta$ para chegarmos à conclusão que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \, \mathrm{d}t = 0$$

Como ambos os limites laterais são iguais, temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \, \mathrm{d}t = 0$$

e como consequência

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[f(x) + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x) \, \mathrm{d}t \right] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

para todo x em I. ■

Teorema 1.2 (Teorema de Rolle)**.** *Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Suponha que não exista $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, isto é, a função f não tem mínimos ou máximos em (a, b). Isso significa que f tem seu máximo e mínimo em $[a, b]$ justamente nas extremidades. Mas como $f(a) = f(b)$, segue que f é constante em $[a, b]$, no que implica $f'(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$, o que contradiz a hipótese. ■

Teorema 1.3 (Valor médio). *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e f' existe em (a, b), então existe algum $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demonstração. Seja g uma função definida por

$$g(x) = bf(x) - af(x) - xf(b) + xf(a) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)]$$

Então $g(a) = bf(a) - af(b) = g(b)$. Como f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então multiplicar f por uma constante e somar com uma função afim $x[f(b) - f(a)]$ manterá a continuidade e a diferenciabilidade de g em $[a, b]$ e (a, b) respectivamente[1]. Aplicando o teorema de Rolle (1.2), temos que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Mas também

$$g'(x) = f'(x)(b - a) - [f(b) - f(a)]$$

Substituindo x por c, obteremos

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Como f é integrável em $[a, b]$, segue que ■

Teorema 1.4 (Derivada nula). *Se $\dfrac{dF}{dx} = 0$ para todo x em um intervalo aberto $I = (a, b)$, então F é constante em I.*

Demonstração. Como $\dfrac{dF}{dx} = F'(x)$ é uma função limitada em (a, b), segue que F é uma função contínua. Então podemos usar o teorema do valor médio (1.3) para mostrar que para qualquer x em $[a, b]$ existe algum $c \in (a, b)$ tal que

$$F(x) - F(a) = F'(c)(x - a)$$

Mas $F'(c) = 0$, no que implica $F(x) = F(a)$ para todo x em $[a, b]$, isto é F é constante em $[a, b]$. ■

Definição 1.1 (Funções primitivas). *Se F é uma função tal que*

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

para alguma função f, então denominamos F uma função primitiva de f no intervalo I.

Teorema 1.5 (Diferença entre funções primitivas). *Se F e G são primitivas de f em um intervalo I, então F e G só diferem de uma constante em I.*

[1] Note que $|f(x) + \alpha x - f(t) - \alpha t| \leqslant |f(x) - f(t)| + |\alpha| \cdot |x - t| < \epsilon$ se $|f(x) - f(t)| < \epsilon/2$ e $|x - t| < \delta$ para todo x tal que $|x - t| < \delta = \dfrac{\epsilon}{2|\alpha|}$, o que garante a continuidade de g.

Demonstração. Pela definição de primitiva, temos

$$F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Usando a propriedade distributiva da derivada,

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) - G(x)\right) = 0$$

Pelo teorema da derivada nula (1.4), temos que

$$F(x) - G(x) = C$$

onde C é uma constante. ■

Teorema 1.6 (Segundo teorema fundamental do cálculo)**.** *Seja f for uma função contínua em (a, b), $c \in (a, b)$ e F qualquer primitiva de f em (a, b). Então para todo x em I*

$$F(x) = F(c) + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Demonstração. Seja A uma função definida pela expressão

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in (a, b)$$

Então pelo primeiro teorema fundamental do cálculo (1.1) temos que $A'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$ Além disso, A é uma primitiva de f. Como F também é uma primitiva de f, o teorema (1.5) nos garante que

$$F(x) - A(x) = C$$

onde C é uma constante. Mas quando $x = c$, temos $A(x) = 0$, no que implica

$$F(c) = C$$

Como consequência, temos

$$F(x) - A(x) = F(c)$$

ou equivalentemente

$$F(x) = F(c) + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

■

O teorema (1.6) também aparece mais comumente na forma

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(c) \tag{2}$$

Teorema 1.7 (Lema fundamental do cálculo variacional). *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e para qualquer função contínua $\eta(x)$ que satisfaz as condições de contorno $\eta(a) = \eta(b) = 0$ for válido*

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

então $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$.

Demonstração. Suponha que f seja positiva em um intervalo $(x_1, x_2) \subset [a, b]$ com $x_1 \neq x_2$. Seja $\eta(x)$ a função definida por

$$\eta(x) = \begin{cases} (x - x_1)(x_2 - x) & \text{se } x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

Se $x \in (x_1, x_2)$, segue que $x_1 < x < x_2$ e consequentemente $x - x_1 > 0$ e $x_2 - x > 0$, o que implica $\eta(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_1} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{b} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

que é positivo, uma vez que $f(x)\eta(x)$ é positivo em (x_1, x_2). Isso contradiz a hipótese da integral ser zero e portanto $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$. ■

1.2 Cálculo em várias dimensões

Para facilitar a notação, iremos definir

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial q_i} \quad \text{com} \quad q_1 = e_1 = x \quad q_2 = e_2 = y \quad q_3 = e_3 = z$$

e também

$$\hat{\mathbf{e_1}} = \hat{\mathbf{i}} \qquad \hat{\mathbf{e_2}} = \hat{\mathbf{j}} \qquad \hat{\mathbf{e_3}} = \hat{\mathbf{k}}$$

1.2.1 Produto escalar e vetorial

Definição 1.2 (Produto escalar). *Sejam $\vec{\mathbf{u}} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$ elementos do espaço $\mathbb{R}^3$. Definimos o produto escalar de $\vec{\mathbf{u}}$ com $\vec{\mathbf{v}}$ como sendo*

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

Definição 1.3 (Produto vetorial). *Sejam $\vec{\mathbf{u}} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$ elementos do espaço $\mathbb{R}^3$. O produto vetorial de $\vec{\mathbf{u}}$ com $\vec{\mathbf{v}}$ é dado por*

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} u_i v_j \hat{\mathbf{e_k}}$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & se\ (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & se\ (i,j,k) \in \{(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)\} \\ 0 & se\ i=j\ ou\ j=k\ ou\ i=k \end{cases}$$

Permutações pares dos índices do símbolo de Levi-Civita não alteram o sinal, ao contrário das permutações ímpares. Quaisquer índices iguais levam a zero.

Desse modo, o produto escalar triplo $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$ é dado por

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) &= \sum_{k=1}^{3} u_k (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})_k \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} u_k v_i w_j \end{aligned}$$

Permutando os índices $k \longleftrightarrow i$ e em seguida $k \longleftrightarrow j$, temos que $\epsilon_{kij} = \epsilon_{ijk}$ e então

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k \tag{3}$$

Sobre o símbolo de Levi-Civita, note que $(\hat{\mathbf{e_p}})_q = \delta_{pq}$ implica

$$\hat{\mathbf{e_i}} \cdot (\hat{\mathbf{e_j}} \times \hat{\mathbf{e_k}}) = \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \epsilon_{lmn}\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} = \epsilon_{ijk}$$

onde δ_{il} é o delta de Kronecker, definido como sendo

$$\delta_{il} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq l \\ 1 & \text{se } i = l \end{cases}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} &= \sum_{i=1}^{3} \hat{\mathbf{e_i}} \cdot (\hat{\mathbf{e_j}} \times \hat{\mathbf{e_k}}) \hat{\mathbf{e_i}} \cdot (\hat{\mathbf{e_l}} \times \hat{\mathbf{e_m}}) = \sum_{i=1}^{3} (\hat{\mathbf{e_j}} \times \hat{\mathbf{e_k}})_i (\hat{\mathbf{e_l}} \times \hat{\mathbf{e_m}})_i \\ &= (\hat{\mathbf{e_j}} \times \hat{\mathbf{e_k}}) \cdot (\hat{\mathbf{e_l}} \times \hat{\mathbf{e_m}}) \end{aligned}$$

Como os versores cartesianos são ortonormais entre si, segue que o segundo membro só pode ser diferente de zero se

$$\hat{\mathbf{e_j}} \times \hat{\mathbf{e_k}} = \hat{\mathbf{e_l}} \times \hat{\mathbf{e_m}} \quad \text{ou} \quad \hat{\mathbf{e_j}} \times \hat{\mathbf{e_k}} = -\hat{\mathbf{e_l}} \times \hat{\mathbf{e_m}}$$

No primeiro caso obteremos

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km}$$

e no segundo,

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = -\delta_{jm}\delta_{kl}$$

Como $\hat{\mathbf{e_p}} \times \hat{\mathbf{e_p}} = \mathbf{0}$ para qualquer p (isto é, os dois casos são mutualmente exclusivos), podemos somar ambos para obter a forma mais geral

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{4}$$

1.2.2 Operador nabla

Definição 1.4 (Gradiente). *Seja $V(x, y, z) : X \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função cujas derivadas de primeira ordem existam em X. O gradiente de V em coordenadas cartesianas é definido pela expressão*

$$\boldsymbol{\nabla} V(x, y, z) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i V \hat{\mathbf{e_i}} \tag{5}$$

Definição 1.5 (Divergente). *Seja $\mathbf{F} : X \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial dado pela expressão*

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \tag{6}$$

cujas derivadas de primeira ordem existam em X. O divergente de F em coordenadas cartesianas é definido por

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \partial_i F_i$$

Definição 1.6 (Rotacional). *Seja $\mathbf{F} : X \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ um campo vetorial dado pela expressão* (6). *Definimos o rotacional de F em coordenadas cartesianas pela expressão*

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_i F_j \hat{\mathbf{e_k}}$$

Definição 1.7 (Laplaciano escalar e laplaciano vetorial). *Sejam $V : X \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ e $\mathbf{F} : X \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ funções contínuas com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas. Então definimos o laplaciano escalar de V em coordenadas cartesianas pela expressão*

$$\nabla^2 V = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} V) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i \partial_i V$$

e o laplaciano vetorial de $\mathbf{F}$ por

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} (\nabla^2 F_i)\hat{\mathbf{e_i}}$$

Teorema 1.8 (Aplicações únicas de nabla). *Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ funções com derivadas de primeira ordem contínuas e $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ campos vetoriais $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ com primeiras derivadas contínuas. Então*

1. $\boldsymbol{\nabla}(fg) = f\boldsymbol{\nabla} g + g\boldsymbol{\nabla} f$
2. $\boldsymbol{\nabla}(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{u}} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{v}} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{v}} + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{u}}$
3. $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\vec{\mathbf{u}}) = f(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}}) + \vec{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f)$
4. $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) - \vec{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{v}})$
5. $\boldsymbol{\nabla} \times (f\vec{\mathbf{u}}) = (\boldsymbol{\nabla} f) \times \vec{\mathbf{u}} + f(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}})$
6. $\boldsymbol{\nabla} \times (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}}) - \vec{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}}) + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{u}} - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{v}}$

Teorema 1.9 (Aplicações sucessivas de nabla). *Seja $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função real com derivadas primeira e segunda contínuas e $\vec{\mathbf{u}}$ um campo vetorial $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ com primeira e segunda derivadas contínuas. Então*

1. $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = \mathbf{0}$
2. $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) = 0$
3. $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}}) - \boldsymbol{\nabla}^2\vec{\mathbf{u}}$

Demonstração. Para o primeiro item, temos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_i \left(\boldsymbol{\nabla} f\right)_j \hat{\mathbf{e_k}} \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j V\hat{\mathbf{e_k}}\end{aligned}$$

Trocando os índices mudos i por j e vice-versa, obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{jik}\partial_j\partial_i V\hat{\mathbf{e_k}} = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j V\hat{\mathbf{e_k}} \\ &= -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f)\end{aligned}$$

onde usamos o fato dos operadores ∂_i e ∂_j comutarem em funções com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas e que uma permutação ímpar de ϵ_{ijk} acarreta na mudança de sinal. Por consequência, temos

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = \mathbf{0}$$

Para o segundo item, temos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) &= \sum_{k=1}^{3} \partial_k(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}})_k = \sum_{k=1}^{3} \partial_k \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_i u_j \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_k\partial_i u_j\end{aligned}$$

Trocando de lugar os índices mudos k e i e usando o mesmo raciocínio do primeiro item, chegaremos à conclusão que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) \implies \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) = 0$$

E quanto ao último item, temos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_i(\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}})_j\hat{\mathbf{e_k}} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\partial_i(\epsilon_{lmj}\partial_l u_m)\hat{\mathbf{e_k}} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmj}\right)\partial_i\partial_l u_m\hat{\mathbf{e_k}}
\end{aligned}$$

Usando a propriedade (4) do símbolo de Levi-Civita e sabendo que $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki}$ e $\epsilon_{lmj} = \epsilon_{jlm}$, temos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) &= \sum_{i,k,l,m=1}^{3} (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})\partial_i\partial_l u_m\hat{\mathbf{e_k}} \\
&= \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \delta_{kl}\delta_{im}\partial_i\partial_l u_m\hat{\mathbf{e_k}} - \sum_{i,k,l,m=1}^{3} \delta_{km}\delta_{il}\partial_i\partial_l u_m\hat{\mathbf{e_k}} \\
&= \sum_{i,k=1}^{3} \partial_i\partial_k u_i\hat{\mathbf{e_k}} - \sum_{i,k=1}^{3} \partial_i\partial_i u_k\hat{\mathbf{e_k}}
\end{aligned}$$

Como $\vec{\mathbf{u}}$ é um campo vetorial contínuo, o operador ∂_i comuta com ∂_k e então

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}) &= \sum_{k=1}^{3} \partial_k\left(\sum_{i=1}^{3}\partial_i u_i\right)\hat{\mathbf{e_k}} - \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\partial_i\partial_i u_k\right)\hat{\mathbf{e_k}} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \partial_k(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{e_k}} - \sum_{k=1}^{3}(\nabla^2 u_k)\hat{\mathbf{e_k}} \\
&= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}}) - \boldsymbol{\nabla}^2\vec{\mathbf{u}}
\end{aligned}$$

■

Como consequência, também podemos escrever o laplaciano vetorial usando a equação

$$\boldsymbol{\nabla}^2\vec{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}})$$

Definição 1.8 (Conjunto estrelado)**.** *Uma região C é denominado de estrelada se existir algum ponto P em C tal que qualquer reta que ligue P a qualquer outro ponto de C esteja inteiramente em C.*

Teorema 1.10 (Campos irrotacionais)**.** *Um campo vetorial com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas em um subconjunto estrelado* $X \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} : X \mapsto \mathbb{R}^3$*, definido em* (6) *satisfaz*

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

para todo $\mathbf{r}$ *em* X *se e somente se existir alguma função vetorial* V *tal que* $\forall \mathbf{r} \in X$ *o campo vetorial* $\mathbf{F}$ *pode ser escrito na forma*

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} V$$

Demonstração. Seja $V_0(\mathbf{r})$ uma função definida pela expressão

$$V_0(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \, \mathrm{d}t$$

com

$$\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{F}(t(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0))$$

onde $\mathbf{r}_0$ é um vetor que aponte para algum ponto P em X tal que qualquer qualquer reta unindo P a qualquer outro ponto em X pertence inteiramente a X. Por X ser um conjunto estrelado, existe pelo menos um ponto de X que satisfaz essa condição.

Seja também X_0 a translação da região X pelo vetor $\mathbf{r}_0$ até a origem (de forma que $\mathbf{0} \in X_0$). Dessa forma, qualquer vetor posição $\mathbf{r} \in X_0$ obedecerá $t(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \in X \; \forall t \in [0, 1]$.

Calculando o gradiente de $V_0(\mathbf{r})$, temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} V_0(\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\nabla} \int_0^1 \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{\nabla} \left(\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

uma vez que a integral é em t e os limites de integração não possuem dependência em x, y ou z.

Usando o item 2 do teorema (1.8), iremos obter

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} V_0(\mathbf{r}) = \int_0^1 & \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r})) + \\ & (\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Do primeiro rotacional temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(t(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

para qualquer $t \in [0,1]$ já que qualquer ponto da reta $t(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)$ nesse domínio sempre pertencerá a X devido a ser um conjunto estrelado. Além disso, $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$, no que implica

$$\boldsymbol{\nabla} V_0(\mathbf{r}) = \int_0^1 (\mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} + (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}t$$

onde

$$(\mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = \sum_i\sum_j F_i\partial_i e_j\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}} = \sum_i\sum_j F_i\delta_{ij}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}} = \sum_i F_i\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r})$$

e

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r}) &= \sum_i\sum_j e_i\partial_i F_j\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}\\ &= \sum_i\sum_j e_i\frac{\partial F_j}{\partial(te_i)}\cdot\frac{\partial(te_i)}{\partial e_i}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}\\ &= t\sum_j\left(\sum_i e_i\frac{\partial F_j}{\partial(te_i)}\right)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

Mas também

$$\frac{d}{dt}F_j(t\cdot\mathbf{r}) = \sum_i\frac{\partial F_j}{\partial(te_i)}\cdot\frac{\partial(te_i)}{\partial t} = \sum_i e_i\frac{\partial F_j}{\partial(te_i)}$$

e portanto

$$(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r}) = t\sum_j\frac{dF_j}{dt}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}} = t\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r})$$

Consequentemente o gradiente de V_0 fica

$$\boldsymbol{\nabla} V_0(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r}) + t\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}t$$

Usando integração por partes no segundo termo, temos

$$\boldsymbol{\nabla} V_0(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}t + \left(t\mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r})\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathbf{F}_0(t\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}t\right) = \mathbf{F}_0(\mathbf{r})$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla} V_0(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)$$

Agora definindo uma outra função $V(\mathbf{r})$ tal que $V(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0) = V_0(\mathbf{r})$ para todo $\mathbf{r}\in X_0$, temos que

$$\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)$$

Isto é, para qualquer vetor posição $\mathbf{r}$ tal que $\mathbf{r} \in X$ teremos

$$\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

A recíproca é trivial, uma vez que

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} V) = \mathbf{0}$$

devido ao primeiro item do teorema (1.9). ∎

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ tal que $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ em um subconjunto X é denominado de irrotacional em X. E se $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ puder ser totalmente descrito meramente pelo gradiente de alguma função $V(\mathbf{r})$ em um conjunto X, então ele é dito conservativo em X. Além disso, a família dessas funções V é denominada de funções potenciais de $\mathbf{F}$. Se X for um conjunto estrelado no qual $\mathbf{F}$ é irrotacional, então o teorema (1.10) garante que $\mathbf{F}$ é conservativo nessa região.

Teorema 1.11 (Campos solenoidais)**.** *Um campo vetorial com primeira e segunda derivadas contínuas em um subconjunto estrelado $X \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} : X \mapsto \mathbb{R}^3$, definido em* (6) *satisfaz*

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$$

para todo $\mathbf{r}$ em um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^3$ se e somente se existir algum campo vetorial $\mathbf{A}$ tal que $\forall \mathbf{r} \in X$ o campo vetorial $\mathbf{F}$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

Demonstração. Seja $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ um campo vetorial definido pela expressão

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \times (t \cdot \mathbf{r})\, \mathrm{d}t$$

onde novamente

$$\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{F}(t(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0))$$

com $\mathbf{r}$ restrito ao conjunto X_0 que é a translação de X por um vetor $\mathbf{r}_0$ que aponta para um ponto P em X no qual qualquer reta que ligue P a qualquer outro em X esteja totalmente em X.

Calculando o rotacional de $V(\mathbf{r})$, temos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\nabla} \times \int_0^1 \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \times (t \cdot \mathbf{r})\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \times (t \cdot \mathbf{r}))\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

uma vez que a integral é independente das coordenadas.

Usando o sexto item do teorema (1.8), obteremos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \int_0^1 & \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\nabla} \cdot (t \cdot \mathbf{r})) - (t \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r})) + \\
& ((t \cdot \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla})(t \cdot \mathbf{r})\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\nabla} \cdot (t \cdot \mathbf{r}) = 3t$ e $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) = 0$, então

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \int_0^1 3t\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) + t(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) - t(\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{r}\,\mathrm{d}t$$

Conforme calculado na demonstração do teorema (1.10), temos

$$(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) = t\frac{d}{dt}\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \quad \text{e} \quad (\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{r} = \mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r})$$

e então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) &= \int_0^1 3t\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) + t^2\frac{d}{dt}\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) - t\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^2\frac{d}{dt}\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) + 2t\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r})\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Agora note que

$$t^2\frac{d}{dt}\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) + 2t\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r}) = \frac{d}{dt}\big(t^2\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r})\big)$$

e portanto

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(t^2\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r})\big)\,\mathrm{d}t = \big[t^2\mathbf{F}_0(t \cdot \mathbf{r})\big]\Bigg|_0^1 = \mathbf{F}_0(\mathbf{r})$$

Definindo um outro campo vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ tal que $\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r})$, temos que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)$$

Ou seja, para qualquer vetor posição $\mathbf{r}$ que aponte para um ponto pertencente a X temos

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

A recíproca é trivial, uma vez que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = 0$$

devido ao segundo item do teorema (1.9). ■

Um campo vetorial $\mathbf{F}$ no qual $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 0$ em um subconjunto X é chamado de solenoidal nessa região. O teorema (1.11) garante que se X for um conjunto estrelado, então existe algum campo vetorial $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ em todo o conjunto X.

1.2.3 Integrais de linha

Teorema 1.12. *Se* $\mathbf{F}$ *é uma função vetorial integrável em* X *tal que para toda curva fechada* C *contida em* X *for verdade*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

então

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

para quaisquer curvas C_1 *e* C_2 *em* X *que comecem em um mesmo ponto e terminem em outro ponto. A recíproca também é verdadeira.*

Demonstração. Seja C_1 qualquer curva que comece em um ponto $\mathbf{p}$ e termine em $\mathbf{q}$, ambos em X. Seja também uma outra curva qualquer C_2 que comece em $\mathbf{q}$ e termine em $\mathbf{p}$. Então

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

Invertendo o sentido de C_2 e obtendo uma nova curva $\overline{C_2}$, invertemos o sinal da integral, no que resulta

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\overline{C_2}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\overline{C_2}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Usando o mesmo raciocínio de trás para frente, pode-se provar a recíproca. ■

1.2.4 Teoremas fundamentais

Teorema 1.13 (Teorema do gradiente)**.** *Seja* $V : X \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e* C *uma curva em* X *tal que comece em um ponto* $\mathbf{p}$*, termine em* $\mathbf{q}$ *e seja suave por partes. Então*

$$\int_C \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{p})$$

Demonstração. Sejam C_i curvas retas no $\mathbb{R}^3$ alinhadas de modo que C_i começa no término C_{i-1} e todos os pontos de começo e fim (denotados por x_i, y_i e z_i) estão em C. Então podemos aproximar a integral de linha por

$$\int_C \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \approx \sum_i^n \int_{C_i} \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

onde $\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_l^3 \mathrm{d}q_l \hat{\mathbf{e_k}}$, de modo que

$$\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}V$$

e então

$$\int_C \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \approx \sum_i^n \int_{C_i} \mathrm{d}V$$

Mas no limite infinitesimal

$$\int_{C_i} \mathrm{d}V = \int_{(x_{i-1},y_{i-1},z_{i-1})}^{(x_i,y_i,z_i)} 1\,\mathrm{d}V = V(x_i, y_i, z_i) - V(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$$

Segue disso que

$$\int_C \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \approx \sum_i^n V(x_i, y_i, z_i) - V(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$$

Mas isso é uma soma telescópica, no que

$$\int_C \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \approx V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{p})$$

No limite em que n tende ao infinito (refinar o conjunto das curvas C_i), temos

$$\int_C \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{p})$$

■

Corolário. *Note que não foi preciso refinar o conjunto de curvas C_i para obter o resultado correto, ou seja a integral de linha poderia ter sido calculada em uma linha reta que une* $\mathbf{p}$ *e* $\mathbf{q}$*. Além disso a integral de linha não depende do caminho mas exclusivamente dos pontos inicial e final. Como consequência do teorema* (1.12) *segue que*

$$\oint_C \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

para qualquer curva fechada C onde $\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r})$ está definido.

Os seguintes teoremas serão provados apenas para superfícies ou volumes retangulares, porém possuem validade para formas mais gerais.

Teorema 1.14 (Teorema de Green)**.** *Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções definidas em uma região fechada Σ com fronteira $\partial\Sigma$ e que possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas nessa superfície. Então*

$$\oint_{\partial\Sigma} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

com a integral de linha orientada no sentido anti-horário.

Demonstração. Dada uma superfície retangular Σ no plano xy dada por $[x_0, x_n] \times [y_0, y_m]$, podemos dividi-la em regiões retangulares menores Σ_{ij} contidas em Σ. A soma de todas as integrais de linha que percorrem cada região Σ_{ij} devem se cancelar exceto nas bordas de Σ, no que implica

$$\oint_{\partial\Sigma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \sum_i^n \sum_j^m \oint_{\Sigma_{ij}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

onde

$$\begin{aligned}\oint_{\Sigma_{ij}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = &\int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x,y_{j-1})\,\mathrm{d}x + \int_{y_{j-1}}^{y_j} Q(x_i,y)\,\mathrm{d}y + \\ &\int_{x_i}^{x_{i-1}} P(x,y_j)\,\mathrm{d}x + \int_{y_j}^{y_{j-1}} Q(x_{i-1},y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

com a ordem das integrais começando de x_{i-1} até x_i com $y = y_{j-1}$ e percorrendo no sentido anti-horário, ou seja $x_{i-1} < x_i$ e $y_{j-1} < y_j$.

Agora suponha que a grelha seja refinada o suficiente para que os valores de x_i sejam muito próximos de x_{i-1} e o mesmo para y_j e y_{j-1}. Então na primeira integral podemos fazer uma aproximação de $P(x, y_{j-1})$ por série de Taylor[2] até a primeira ordem, isto é

$$P(x,y_{j-1}) = P(x_{i-1},y_{j-1}) + \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_{i-1}} (x - x_{i-1}) + O(x^2)$$

onde $O(x^2)$ são os termos que dependem de x^2 ou potências maiores.

Denotando $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, temos que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x,y_{j-1})\,\mathrm{d}x = \Delta x_i P(x_{i-1},y_{j-1}) + \frac{(\Delta x_i)^2}{2}\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_{i-1}} + O((\Delta x_i)^3)$$

Analogamente temos que

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} Q(x_i,y)\,\mathrm{d}y = \Delta y_j Q(x_i,y_{j-1}) + \frac{(\Delta y_j)^2}{2}\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{y_{j-1}} + O((\Delta y_j)^3)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i-1}} P(x,y_j)\,\mathrm{d}x = -\Delta x_i P(x_{i-1},y_j) - \frac{(\Delta x_i)^2}{2}\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_{i-1}} - O((\Delta x_i)^3)$$

$$\int_{y_j}^{y_{j-1}} Q(x_{i-1},y)\,\mathrm{d}y = -\Delta y_j Q(x_{i-1},y_{j-1}) - \frac{(\Delta y_j)^2}{2}\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{y_{j-1}} - O((\Delta y_j)^3)$$

[2]Em toda a demonstração, todas as expansões serão centradas no ponto (x_{i-1}, y_{j-1}).

e então

$$\oint_{\Sigma_{ij}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \Delta x_i \left[P(x_{i-1},y_{j-1}) - P(x_{i-1},y_j)\right] + \frac{(\Delta x_i)^2}{2}\left[\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_{i-1}} - \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x_{i-1}}\right] + \Delta y_j \left[Q(x_i,y_{j-1}) - Q(x_{i-1},y_{j-1})\right] + \frac{(\Delta y_j)^2}{2}\left[\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{y_{j-1}} - \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{y_{j-1}}\right] + O((\Delta x_i)^3,(\Delta y_j)^3)$$

$$\oint_{\Sigma_{ij}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \Delta x_i \left[P(x_{i-1},y_{j-1}) - P(x_{i-1},y_j)\right] + \Delta y_j \left[Q(x_i,y_{j-1}) - Q(x_{i-1},y_{j-1})\right] + O((\Delta x_i)^3,(\Delta y_j)^3)$$

Mas note que no limite infinitesimal, temos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{P(x_{i-1},y_j) - P(x_{i-1},y_{j-1})}{\Delta y_j}$$

no que implica

$$\Delta x_i \left[P(x_{i-1},y_{j-1}) - P(x_{i-1},y_j)\right] = -\frac{\partial P}{\partial y}\Delta x_i \Delta y_j$$

onde a derivada parcial é calculada no ponto (x_{i-1},y_{i-1}). Analogamente temos

$$\Delta y_j \left[Q(x_i,y_{j-1}) - Q(x_{i-1},y_{j-1})\right] = \frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x_i \Delta y_j$$

Ou seja, a integral de linha em cada retângulo menor Σ_{ij} é dado por

$$\oint_{\Sigma_{ij}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Delta x_i \Delta y_j + O((\Delta x_i)^3,(\Delta y_j)^3)$$

No limite em que $\Delta x_i \to 0$ e $\Delta y_j \to 0$ (e consequentemente n e m tendem ao infinito), o termo $O((\Delta x_i)^3,(\Delta y_j)^3)$ tende a zero rapidamente. Agora seja δx, δy definidos por

$$\delta x = \max\{\Delta x_i,\ \forall i\} \quad \delta y = \max\{\Delta y_j,\ \forall j\}$$

Então temos

$$\oint_{\partial\Sigma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\delta x,\delta y \to 0} \sum_i^n \sum_j^m \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Delta x_i \Delta y_j$$

Porém o membro direito é exatamente a definição de integral dupla na superfície Σ, ou seja

$$\oint_{\partial\Sigma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

■

Teorema 1.15 (Teorema de Gauss da divergência)**.** *Seja $V \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto que possui uma fronteira suave e definida por partes ∂V. Se $\mathbf{F}$ for uma função continuamente diferenciável em V e suas vizinhanças, então*

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}\tau$$

onde o vetor $\mathrm{d}\mathbf{a}$ *é normal à superfície ∂V e orientado para fora do volume.*

Demonstração. Seja V um volume retangular dado por $[x_0, x_n] \times [y_0, y_m] \times [z_0, z_l]$. De maneira análoga à demonstração do teorema de Green, podemos repartir esse volume V em vários paralelepípedos menores V_{ijk} dados por $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$. As integrais de superfície desses volumes menores se anulam em diversas faces devido à orientação do vetor área, exceto as da fronteira ∂V. Então

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \sum_i^n \sum_j^m \sum_k^l \oiint_{V_{ijk}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

Cada volume V_{ijk} é um paralelepípedo de 6 faces, então

$$\oiint_{V_{ijk}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iint_{S_{x_{i-1}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_{S_{y_{j-1}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_{S_{z_{k-1}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_{S_{x_i}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_{S_{y_j}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_{S_{z_k}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

Agora denotando as componentes de $\mathbf{F}$ por P,Q e R,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \tag{7}$$

então na primeira integral temos $\mathrm{d}\mathbf{a} = -\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\hat{\mathbf{i}}$

$$\iint_{S_{x_{i-1}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -\iint_{S_{x_{i-1}}} P(x_{i-1}, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Agora sejam y'_j e z'_k os pontos médios que delimitam $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ e $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ respectivamente, ou seja

$$y'_j = \frac{y_j + y_{j-1}}{2} \quad \text{e} \quad z'_k = \frac{z_k - z_{k-1}}{2}$$

Iremos expandir P para o centro do quadrado $[y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$. Primeiramente, na variável y temos

$$P(x_{i-1}, y, z) = P(x_{i-1}, y'_j, z) + \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y'_j} (y - y'_j) + O((y - y'_j)^2)$$

E agora expandindo em z, obteremos

$$P(x_{i-1},y,z) = P(x_{i-1},y'_j,z'_k) + \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{\substack{y'_j\\z'_k}}(z-z'_k) + \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{y'_j\\z'_k}}(y-y'_j) + \left.\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}\right|_{\substack{y'_j\\z'_k}}(y-y'_j)(z-z'_k) + O((y-y'_j)^2,(z-z'_k)^2)$$

Ao integrar $P(x_{i-1},y,z)$ de y_{j-1} até y_j e de z_{k-1} até z_k, teremos que

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} (y-y'_j)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{z_{k-1}}^{z_k} (z-z'_k)\,\mathrm{d}y = 0$$

devido à imparidade do integrando em relação ao centro do intervalo de integração.

No limite infinitesimal onde Δy_j e Δz_k tendem a zero, o termo $O(\Delta y_j^2, \Delta z_k^2)$ tende a zero rapidamente. Nessas condições, isso implica

$$\iint_{S_{x_{i-1}}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -P(x_{i-1},y'_j,z'_k)\Delta y_j \Delta z_k$$

A integral da superfície oposta, de maneira análoga, é dada por

$$\iint_{S_{x_i}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = P(x_i,y'_j,z'_k)\Delta y_j \Delta z_k$$

de modo que

$$\iint_{S_{x_i}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_{S_{x_{i-1}}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \left(P(x_i,y'_j,z'_k) - P(x_{i-1},y'_j,z'_k)\right)\Delta y_j \Delta z_k$$

Mas no limite infinitesimal, temos

$$P(x_i,y'_j,z'_k) - P(x_{i-1},y'_j,z'_k) = \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x_i$$

onde a derivada parcial é calculada no ponto (x_i,y'_j,z'_k). Uma vez que Δy_j e Δz_k tendem a zero e P tem derivadas contínuas, o valor da derivada parcial também tenderá à derivada no ponto (x_i,y_j,z_k). Isso significa que

$$\iint_{S_{x_i}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_{S_{x_{i-1}}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

De maneira totalmente análoga para as demais quatro superfícies, temos que

$$\iint_{S_{y_{j-1}}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_{S_{y_j}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{\partial Q}{\partial y}\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

$$\iint_{S_{z_{k-1}}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_{S_{z_k}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{\partial R}{\partial z}\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

e então

$$\oiint_{V_{ijk}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = (\boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{F})\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Novamente denotando δx, δy e δz os maiores valores de cada Δx_i, Δy_j e Δz_k respectivamente, temos

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta z \to 0} \sum_i^n \sum_j^m \sum_k^l (\boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{F})\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Porém o membro direito é justamente a definição de integral tripla em todo o volume V, no que acarreta

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}\tau$$

■

Teorema 1.16 (Teorema de Stokes)**.** *Seja Σ uma superfície suave orientada no $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Sigma$. Se $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ for um campo vetorial dado por* (7) *definido em Σ e possuir derivadas parciais contínuas em uma região que contém Σ, então*

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{\nabla}\times \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Demonstração. Podemos repartir a superfície Σ em várias outras menores Σ_{pq} que pode ser descrita por uma parametrização $\mathbf{r}(u, v)$, onde

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

com (u, v) pertencendo a uma região Π_{pq} no plano uv.

Para parametrizar a fronteira de Σ_{pq}, suponha que $u = u(t)$ e $v = v(t)$, de forma que descrevam $\partial\Pi$ e também

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{d}y\hat{\mathbf{j}} + \mathrm{d}z\hat{\mathbf{k}} = \left(\frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}\right)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\hat{\mathbf{k}}\right]\mathrm{d}t$$

e então temos que

$$\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\mathrm{d}t +$$
$$Q(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\mathrm{d}t +$$
$$R(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\mathrm{d}t$$

$$\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \left(P(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial u} + Q(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial u} + R(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{du}{dt}\,\mathrm{d}t + \left(P(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial v} + Q(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial v} + R(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{dv}{dt}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathcal{P}(u,v)\,\mathrm{d}u + \mathcal{Q}(u,v)\,\mathrm{d}v$$

onde

$$\mathcal{P}(u,v) = P(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial u} + Q(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial u} + R(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$\mathcal{Q}(u,v) = P(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial v} + Q(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial v} + R(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial v}$$

com $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ e $z = z(u,v)$. Segue disso que

$$\oint_{\partial\Sigma_{pq}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\partial\Pi_{pq}} \mathcal{P}(u,v)\,\mathrm{d}u + \mathcal{Q}(u,v)\,\mathrm{d}v$$

Por hipótese, as funções P, Q e R são funções deriváveis. Idem para as parametrizações de x, y e z em função de u e v, assim como estas em função de t. Portanto podemos usar o teorema de Green (1.14) na integral de linha do membro direito com a orientação tal que o vetor de área infinitesimal d**a** seja d**u** × d**v** e então

$$\oint_{\partial\Sigma_{pq}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\Pi_{pq}} \left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{8}$$

Agora note que podemos reescrever $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ na forma

$$\mathcal{P}(u,v) = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}(u,v) = \mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

de forma que

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u\partial v}$$

Analogamente temos

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v\partial u}$$

e então

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u\partial v} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} - \mathbf{F}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v\partial u}$$

Como a parametrização de **r** em u e v é suave, temos $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v\partial u} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u\partial v}$ e consequentemente

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$$

Mas também, usando a regra da cadeia e denotando $F_1 = P(u,v)$, $F_2 = Q(u,v)$ e $F_3 = R(u,v)$, obteremos

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} = \sum_{j}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial u} \hat{\mathbf{e_j}} = \sum_{ij}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial u} \hat{\mathbf{e_j}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} = \sum_{ij}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial v} \hat{\mathbf{e_j}}$$

e também

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \sum_{k}^{3} \frac{\partial q_k}{\partial u} \hat{\mathbf{e_k}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \sum_{k}^{3} \frac{\partial q_k}{\partial v} \hat{\mathbf{e_k}}$$

Portanto temos

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\sum_{ij}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial u} \hat{\mathbf{e_j}} \right) \cdot \left(\sum_{k}^{3} \frac{\partial q_k}{\partial v} \hat{\mathbf{e_k}} \right) = \sum_{ijk}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_k}{\partial v} \hat{\mathbf{e_j}} \cdot \hat{\mathbf{e_k}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \sum_{ijk}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_k}{\partial v} \delta_{jk} = \sum_{ij}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_j}{\partial v}$$

De maneira totalmente análoga, obteremos

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \sum_{ij}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial q_j}{\partial u}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= \sum_{ij}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_j}{\partial v} - \sum_{ij}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial q_j}{\partial u} \\ &= \sum_{ij}^{3} (\partial_i F_j) \cdot \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_j}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial q_j}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

A equação (8) fica[3]

$$\oint_{\partial \Sigma_{pq}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\Pi_{pq}} \sum_{ij}^{3} (\partial_i F_j) \cdot \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_j}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial q_j}{\partial u} \right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{9}$$

Por outro lado, o vetor de área infinitesimal d$\mathbf{a}$ na superfície Σ_{pq} é dado pelo produto vetorial da variação do vetor posição $\mathbf{r}$ sob um acréscimo du com a variação de $\mathbf{r}$ sob um acréscimo dv, com a ordem do produto vetorial escolhida

[3] O termo entre parênteses com as derivadas parciais em u e v é o jacobiano das coordenadas u e v em relação às coordenadas cartesianas q_i e q_j. Isso será visto na seção (1.3).

com base na orientação escolhida da superfície devido ao teorema de Green. Isso significa que

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = (\mathbf{r}(u + \mathrm{d}u, v) - \mathbf{r}(u, v)) \times (\mathbf{r}(u, v + \mathrm{d}v) - \mathbf{r}(u, v))$$

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,\mathrm{d}u\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)$$

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sum_{lmn}^{3} \epsilon_{lmn} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_m \hat{\mathbf{e_n}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} &= \left(\sum_{ijk}^{3} \epsilon_{ijk} \partial_i F_j \hat{\mathbf{e_k}}\right) \cdot \left(\sum_{lmn}^{3} \epsilon_{lmn} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_m \hat{\mathbf{e_n}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \sum_{ijklmn}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} \left(\partial_i F_j\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_m \hat{\mathbf{e_k}} \cdot \hat{\mathbf{e_n}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \sum_{ijklmn}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} \left(\partial_i F_j\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_m \delta_{kn}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \sum_{ijklm}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} \left(\partial_i F_j\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_m \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Usando a equação (4), temos

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

e portanto

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \sum_{ijlm}^{3} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \left(\partial_i F_j\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_m \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \sum_{ijlm}^{3} \delta_{il}\delta_{jm} \left(\partial_i F_j\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_m \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \sum_{ijlm}^{3} \delta_{im}\delta_{jl} \left(\partial_i F_j\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_m \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \sum_{ij}^{3} \left(\partial_i F_j\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_j \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \sum_{ij}^{3} \left(\partial_i F_j\right) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)_j \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)_i \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \sum_{ij}^{3} (\partial_i F_j) \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_j}{\partial v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v - \sum_{ij}^{3} (\partial_i F_j) \frac{\partial q_j}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \sum_{ij}^{3} (\partial_i F_j) \cdot \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_j}{\partial v} - \frac{\partial q_j}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Integrando ambos os lados em u e v na superfície Π_{pq}, obteremos

$$\iint_{\Pi_{pq}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iint_{\Pi_{pq}} \sum_{ij}^{3} (\partial_i F_j) \cdot \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_j}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial q_j}{\partial u} \right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{10}$$

Agora compare o membro da direita da equação (9) com o da equação (10). Portanto

$$\oint_{\partial \Sigma_{pq}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\Pi_{pq}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

Mas integrar u e v na superfície Π_{pq} do plano uv é totalmente equivalente a integrar na superfície Σ_{pq} no espaço das coordenadas cartesianas, ou seja

$$\oint_{\partial \Sigma_{pq}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\Sigma_{pq}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{11}$$

Para obtermos a integração em toda a superfície Σ, basta somarmos (11) em p e q. A integração nas fronteiras de Σ_{pq} se anularão exceto nas bordas de Σ enquanto que a soma das integrais das superfícies Σ_{pq} será a integral de toda a superfície Σ, resultando

$$\oint_{\partial \Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

■

1.2.5 Integração por partes

Teorema 1.17. *Sejam* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *e* f *funções contínuas com derivadas contínuas. Então é verdade que*

1. $\iiint_V f(\nabla \cdot \mathbf{A}) \, \mathrm{d}\tau = \oiint_{\partial V} f\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} - \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \, \mathrm{d}\tau$
2. $\iint_\Sigma f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iint_\Sigma [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \oint_{\partial \Sigma} f\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$
3. $\iiint_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, \mathrm{d}\tau = \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \, \mathrm{d}\tau + \oiint_{\partial V} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$

Demonstração. Do terceiro item do teorema (1.8), temos que

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

Integrando ambos os membros em um volume V obteremos

$$\iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{A})\,\mathrm{d}\tau = \iiint_V f(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\,\mathrm{d}\tau + \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f)\,\mathrm{d}\tau$$

Usando o teorema de Gauss (1.15) da divergência no primeiro membro, ficamos com

$$\oiint_{\partial V} f\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iiint_V f(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\,\mathrm{d}\tau + \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f)\,\mathrm{d}\tau$$

e então

$$\iiint_V f(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\,\mathrm{d}\tau = \oiint_{\partial V} f\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} - \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f)\,\mathrm{d}\tau$$

o que demonstra o primeiro item.

Do quinto item do teorema (1.8), temos

$$\boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{A}) = (\boldsymbol{\nabla} f) \times \mathbf{A} + f(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})$$

Integrando ambos os lados em uma superfície Σ, obteremos

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iint_\Sigma (\boldsymbol{\nabla} f) \times \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_\Sigma f(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

Usando o teorema de Stokes (1.16) no primeiro membro, chegaremos na expressão

$$\oint_{\partial\Sigma} f\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_\Sigma (\boldsymbol{\nabla} f) \times \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iint_\Sigma f(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

Segue disso que

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma f(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} &= -\iint_\Sigma (\boldsymbol{\nabla} f) \times \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \oint_{\partial\Sigma} f\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \iint_\Sigma [\mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla} f)] \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \oint_{\partial\Sigma} f\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\end{aligned}$$

o que prova o segundo item.

Do quarto item do teorema (1.8), temos

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})$$

Integrando ambos os lados em um volume V e usando o teorema de Gauss (1.15) da divergência no primeiro membro, obteremos

$$\oiint_{\partial V} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iiint_V \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})\,\mathrm{d}\tau - \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}\tau$$

e então

$$\iiint_V \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})\,\mathrm{d}\tau = \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}\tau + \oiint_{\partial V} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

o que demonstra o terceiro item. ■

1.3 Jacobiano

1.3.1 Áreas e volumes infinitesimais sob parametrização

Sejam u e v parametrizações suaves[4] das coordenadas cartesianas x e y no plano xy. Podemos expandir x e y em série de Taylor em termos de u e v a partir de um ponto (u_{i-1}, v_{j-1}) para saber o comportamento dessas coordenadas sob uma pequena variação de u e v. Para a coordenada x temos

$$x(u,v) = x(u_{i-1}, v_{j-1}) + \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} (u - u_{i-1}) + \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} (v - v_{j-1}) + \left.\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} (u - u_{i-1})(v - v_{j-1}) + O(u^2, v^2)$$

e para a coordenada y,

$$y(u,v) = y(u_{i-1}, v_{j-1}) + \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} (u - u_{i-1}) + \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} (v - v_{j-1}) + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} (u - u_{i-1})(v - v_{j-1}) + O(u^2, v^2)$$

Agora fixemos $v = v_{j-1}$. Variando u de u_{i-1} para u_i, as coordenadas x e y também irão variar. No caso de x, temos

$$x(u_i, v_{j-1}) = x(u_{i-1}, v_{j-1}) + \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} (u_i - u_{i-1}) + O(u^2, v^2)$$

$$x(u_i, v_{j-1}) = x(u_{i-1}, v_{j-1}) + \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} \Delta u + O(u^2, v^2)$$

de modo que

$$\Delta x_u = x(u_i, v_{j-1}) - x(u_{i-1}, v_{j-1}) = \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} \Delta u + O(u^2, v^2)$$

Similarmente, para y temos

$$\Delta y_u = y(u_i, v_{j-1}) - y(u_{i-1}, v_{j-1}) = \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{\substack{u_{i-1}\\ v_{j-1}}} \Delta u + O(u^2, v^2)$$

[4]Parametrizações suaves são aquelas cujas derivadas parciais em u e v existam.

No limite em que Δu é infinitesimal, o termo $O(u^2, v^2)$ rapidamente tenderá a zero. Então o vetor $\vec{r}_{\Delta u}$ que liga os pontos em que houve uma variação infinitesimal Δu é dado por

$$\vec{r}_{\Delta u} = (\Delta x_u, \Delta y_u) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) \Delta u$$

De modo totalmente análogo, o vetor $\vec{r}_{\Delta v}$ que liga os pontos em que houve uma variação infinitesimal Δv é dado por

$$\vec{r}_{\Delta v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right) \Delta v$$

A área A de um paralelogramo formado por dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é numericamente igual ao volume de um paralelepípedo cuja base é o paralelogramo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com altura dada pelo versor $\hat{\mathbf{k}}$. Isto é o produto escalar triplo

$$A = \left|\hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{bmatrix}\right|$$

com o módulo aparecendo devido que a área A é não-negativa.

Portanto a área infinitesimal $\mathrm{d}a$ de uma região formada no plano xy devido à uma região retangular infinitesimal no plano uv é dada por[5]

$$\mathrm{d}a = \left|\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Mas como $\mathrm{d}a = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ no plano cartesiano, temos

$$\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \left|\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Agora no caso tridimensional suponha uma parametrização suave do tipo $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ e $z(u, v, w)$. Realizando o mesmo procedimento de expansão em série de Taylor, os vetores que ligam cada variação infinitesimal Δu, Δv ou

[5] Os diferenciais aparecem fora do determinante devido à propriedade multiplicativa por escalar.

Δw são dados por

$$\vec{r}_{\Delta u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)\Delta u$$
$$\vec{r}_{\Delta v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)\Delta v$$
$$\vec{r}_{\Delta w} = \left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right)\Delta w$$

O volume infinitesimal $\mathrm{d}V$ formado por esses três vetores é dado pelo produto escalar triplo

$$\mathrm{d}V = |\vec{r}_{\Delta u} \cdot \vec{r}_{\Delta v} \times \vec{r}_{\Delta w}| = \left|\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

As duas matrizes que apareceram nos motiva a fazermos a seguinte definição:

Definição 1.9 (Matriz jacobiana)**.** *Sejam u e v parametrizações das coordenadas cartesianas x e y cujas derivadas parciais existam. Então denominamos o determinante da seguinte matriz de jacobiano:*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{12}$$

No caso tridimensional em que há parâmetros u, v e w, temos

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Dessa forma temos que

$$\mathrm{d}a = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

ou então no caso tridimensional

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

1.3.2 Áreas e volumes orientados

A área A e volume V de uma região parametrizada Σ no espaço cartesiano (ou a região Π no espaço uvw) pode ser calculada integrando as diferenciais $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$, ou seja

$$A = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Pi \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$V = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_\Pi \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Entretanto podemos atribuir sinais negativos as essas quantidades se levarmos em conta a orientação (ou ordem de escolha) dos vetores $\vec{r}_{\Delta u}$, $\vec{r}_{\Delta v}$ e $\vec{r}_{\Delta w}$, e isso pode ser feito ao não aplicar o valor absoluto no jacobiano:

$$\mathcal{A} = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Pi \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\mathcal{V} = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_\Pi \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Denominamos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{V}$ respectivamente de área e volume orientados.

Exemplo 1.1 (Troca das coordenadas cartesianas)**.** *Suponha $x(u,v) = v$ e $y(u,v) = u$. Então*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

Portanto

$$\mathcal{A} = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_\Pi \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Isso significa que inverter a ordem de integração altera o sinal da área orientada.

Exemplo 1.2 (Área de uma linha)**.** *Suponha $x(u,v) = u$ e $y(u,v) = u$. Então*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$$

E então

$$\mathcal{A} = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Pi 0\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_\Sigma 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = 0$$

Exemplo 1.3 (Área em coordenadas polares)**.** *Suponha $x(r,\theta) = r\cos(\theta)$ e $y(r,\theta) = r\sin(\theta)$. Então*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$$

Logo a área em coordenadas polares é dada por

$$\mathcal{A} = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

1.4 Vetores contravariantes e covariantes

1.4.1 Transformações contravariantes

Sejam $\xi = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ duas bases de um espaço vetorial V cujo corpo é $\mathbb{K}$. Podemos escrever cada vetor de β como uma combinação linear dos elementos de ξ:

$$v_j = \sum_i^n a_j^i u_i \tag{13}$$

onde a_j^i é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de uma matriz A. Em outras palavras, A é a matriz que leva a base ξ para β.

Seja γ um elemento de V cujas coordenadas na base β são $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, ou seja

$$\gamma = \sum_j^n y^j v_j$$

Segue disso que

$$\gamma = \sum_j^n \sum_i^n y^j a_j^i u_i = \sum_i^n \left(\sum_j^n y^j a_j^i \right) u_i = \sum_i^n x^i u_i$$

onde $x^i = \sum_j^n y^j a_j^i$ é a i-ésima coordenada de γ na base ξ.

Usando a notação matricial, temos que

$$\mathbf{x} = A\mathbf{y}$$

onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são os vetores coluna contendo as coordenadas de γ na base ξ e β respectivamente. Sabemos[6] que $\det A \neq 0$ e portanto A possui uma inversa A^{-1}, de forma que

$$A^{-1}x = y$$

ou equivalentemente

$$y^i = \sum_j^n \tilde{a}_j^i x^j$$

onde $\tilde{a}_j^i$ é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A^{-1}.

Agora note que a transformação das coordenadas do elemento γ de ξ para β se faz usando a matriz A^{-1}, apesar da base ξ se transformar para β usando a matriz A. Com isso, denominamos que as coordenadas do elemento γ se transformam *contravariantemente* sob uma mudança de base.

[6] Se $\det A$ fosse nulo, então 0 seria um autovalor de A e portanto existiria algum autovetor coluna k, cujos elementos pertencem a $\mathbb{K}$ e não todos nulos, tal que $Ak = 0$. Ou seja, existiria alguma n-upla não nula na base β que seria o vetor nulo na base ξ (e consequentemente o elemento nulo de V), o que é falso.

1.4.2 Transformações covariantes

Seja $\alpha : V \mapsto \mathbb{K}$ um funcional linear que leva um elemento de V ao corpo $\mathbb{K}$. No contexto da álgebra linear, esse funcional é uma transformação linear cujo contradomínio é o espaço vetorial formado pelo corpo $\mathbb{K}$. Podemos representar α univocamente por meio de coordenadas em relação a uma base, de forma semelhante à coordenada de um vetor. Sejam p_i as coordenadas de α na base ξ, isto é

$$p_i = \alpha(u_i)$$

Então a aplicação de α no elemento γ resultará

$$\alpha(\gamma) = \alpha\left(\sum_i^n x^i u_i\right) = \sum_i^n x^i \alpha(u_i) = \sum_i^n x^i p_i$$

Por outro lado, substituindo x^i pela sua representação na base β, temos que

$$\alpha(\gamma) = \sum_i^n \sum_j^n y^j a_j^i p_i = \sum_j^n y^j \left(\sum_i^n a_j^i p_i\right)$$

Se denotarmos $q_j = \alpha(v_j)$, temos também

$$\alpha(\gamma) = \alpha\left(\sum_j^n y^j v_j\right) = \sum_j^n y^j \alpha(v_j) = \sum_j^n y^j q_i$$

Como $\alpha(\gamma)$ é o mesmo independentemente da base escolhida, podemos igualar as duas expressões para obtermos

$$\sum_j^n \left(q_j - \sum_i^n a_j^i p_i\right) y^j = 0$$

Essa equação é verdadeira para qualquer γ de V (ou seja, é válida para qualquer escolha dos valores y^j). Em particular, podemos escolher $y^j = \delta_{jj'}$ e então

$$\sum_j^n \left(q_j - \sum_i^n a_j^i p_i\right) y^j = \sum_j^n \left(q_j - \sum_i^n a_j^i p_i\right) \delta_{jj'} = q_{j'} - \sum_i^n a_{j'}^i p_i = 0$$

Trocando o índice mudo j' para j, obteremos

$$q_j = \sum_i^n a_j^i p_i$$

Na notação matricial, essa expressão é equivalente a

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}A$$

onde $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ são vetores linha contendo as coordenadas de α na base ξ e β respectivamente.

Agora note que a transformação das coordenadas do funcional linear α da base ξ para β se dá aplicando a matriz A, exatamente a mesma matriz usada para levar a base ξ para β. Nesse caso, denominamos que as coordenadas de α se transformam *covariantemente* sob uma mudança de base.

1.4.3 Vetores sob mudança de base

Podemos separar os vetores em três grupos: um nos quais se transformam contravariantemente, outro nos que se transformam covariantemente e um terceiro no qual são invariantes sob mudança de base. Isso nos motiva a fazer as seguintes definições.

Definição 1.10 (Vetores contravariantes)**.** *Dada uma matriz A que leva uma base ξ para β, um vetor cuja n-upla se transforme da base ξ para β sob a aplicação de A^{-1} é denominado de contravariante. As coordenadas de um vetor contravariante são denotadas com um índice superior.*

Exemplo 1.4 (Vetor posição)**.** *Seja $\gamma = (q^1, q^2, q^3)$ um vetor qualquer do $\mathbb{R}^3$, onde q^i são as coordenadas na base canônica ξ formada por*

$$\xi = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\} = \{\hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_3}}\}$$

Então temos que

$$\gamma = \sum_{i}^{3} q^i \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}}$$

Agora seja a nova base β formada pelos elementos

$$\beta = \{(2,0,0); (0,2,0); (0,0,2)\} = \{2\hat{\mathbf{e_1}}, 2\hat{\mathbf{e_2}}, 2\hat{\mathbf{e_3}}\} = \{\hat{\mathbf{f_1}}, \hat{\mathbf{f_2}}, \hat{\mathbf{f_3}}\}$$

isto é, dobramos o módulo de cada elemento de ξ. Consequentemente

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{i}}$$

e portanto

$$\gamma = \sum_{i}^{3} \frac{q^i}{2} \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{i}}$$

com agora $f^i = \dfrac{q^i}{2}$ as coordenadas de γ na base β.

Note que aumentar o tamanho dos vetores da base canônica ξ implica em reduzir na mesma proporção as coordenadas para obtermos as novas coordenadas na base β. Esse comportamento invertido se mostra pela matriz A que leva ξ em β:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

enquanto que a matriz que leva as coordenadas de γ na base ξ para β é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\mathbf{f} = A^{-1}\mathbf{q} \quad com \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^n \end{bmatrix}$$

e consequentemente γ é um vetor contravariante.

Definição 1.11 (Vetores covariantes)**.** *Dada uma matriz A que leva uma base ξ para β, um vetor cuja n-upla se transforme da base ξ para β sob a aplicação de A é denominado de covariante. As coordenadas de um vetor covariante são denotadas com um índice inferior.*

Exemplo 1.5 (Gradiente)**.** *Seja $(\mathbf{\nabla} V)_\xi = \left(\frac{\partial V}{\partial q^1}, \frac{\partial V}{\partial q^2}, \frac{\partial V}{\partial q^3}\right)$ o gradiente de uma função V na base canônica ξ cujas derivadas existam, onde q^i são as coordenadas nessa base. Usando a mesma base β do exemplo (1.4), a regra da cadeia nos diz que*

$$\frac{\partial V}{\partial q^i} = \frac{\partial V}{\partial f^i} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial q^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial f^i}$$

no que implica

$$\frac{\partial V}{\partial f^i} = 2\frac{\partial V}{\partial q^i}$$

Por outro lado, o gradiente de V na base β é

$$(\mathbf{\nabla} V)_\beta = \left(\frac{\partial V}{\partial f^1}, \frac{\partial V}{\partial f^2}, \frac{\partial V}{\partial f^3}\right) = \left(2\frac{\partial V}{\partial q^1}, 2\frac{\partial V}{\partial q^2}, 2\frac{\partial V}{\partial q^3}\right) = 2(\mathbf{\nabla} V)_\xi$$

Note que aumentar o tamanho dos vetores da base canônica ξ implica em aumentar na mesma proporção as coordenadas para obtermos as novas coordenadas do gradiente na base β. Na notação matricial, isso significa

$$(\mathbf{\nabla} V)_\beta = (\mathbf{\nabla} V)_\xi A$$

com

$$(\mathbf{\nabla} V)_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial f^1} & \frac{\partial V}{\partial f^2} & \frac{\partial V}{\partial f^3} \end{bmatrix}$$
$$(\mathbf{\nabla} V)_\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial q^1} & \frac{\partial V}{\partial q^2} & \frac{\partial V}{\partial q^3} \end{bmatrix}$$

e portanto $\mathbf{\nabla} V$ é um vetor covariante.

Usando a notação com índice inferior, temos

$$y_i = 2x_i \quad onde \quad y_i = \frac{\partial V}{\partial f^i} \quad x_i = \frac{\partial V}{\partial q^i}$$

Definição 1.12 (Escalares)**.** *Um vetor cuja n-upla é invariante sob qualquer mudança de base é denominado de escalar.*

Exemplo 1.6 (Módulo de um vetor)**.** *Dado $\gamma \in \mathbb{R}^3$, o módulo quadrático de γ na base canônica ξ é dada por*

$$\|\gamma\|_\xi^2 = \gamma \cdot \gamma = \left(\sum_i^3 q^i \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\right) \cdot \left(\sum_j^3 q^j \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j}\right) = \sum_i^3 \sum_j^3 q^i q^j \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j}$$

$$\|\gamma\|_\xi^2 = \sum_i^3 \sum_j^3 q^i q^j \delta_{ij} = \sum_i^3 (q^i)^2$$

Já o módulo de γ numa outra base β qualquer é dado por

$$\|\gamma\|_\beta^2 = \gamma \cdot \gamma = \left(\sum_i^3 f^i \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{i}\right) \cdot \left(\sum_j^3 f^j \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{j}\right) = \sum_i^3 \sum_j^3 f^i f^j \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{j}$$

Mas também os elementos da base β podem ser escrito na base canônica ξ,

$$\hat{\mathbf{f}}_\mathbf{i} = \sum_k^3 a_i^k \hat{\mathbf{e}_\mathbf{k}}$$

de forma que

$$\hat{\mathbf{f}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{j} = \left(\sum_k^3 a_i^k \hat{\mathbf{e}_\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\sum_m^3 a_j^m \hat{\mathbf{e}_\mathbf{m}}\right) = \sum_k^3 \sum_m^3 a_i^k a_j^m \hat{\mathbf{e}_\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{e}_\mathbf{m}}$$

$$\hat{\mathbf{f}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{j} = \sum_k^3 \sum_m^3 a_i^k a_j^m \delta_{km} = \sum_k^3 a_i^k a_j^k$$

e então

$$\|\gamma\|_\beta^2 = \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 f^i f^j a_i^k a_j^k = \sum_k^3 \left(\sum_i^3 f^i a_i^k\right) \cdot \left(\sum_j^3 f^j a_j^k\right)$$

Mas os coeficientes a_i^k são exatamente os que transformam as coordenadas de γ na base β para ξ (transformação contravariante), ou seja,

$$q^k = \sum_i^3 f^i a_i^k$$

e consequentemente

$$\|\gamma\|_\beta^2 = \sum_k^3 q^k q^k = \sum_i^3 (q^i)^2 = \|\gamma\|_\xi^2$$

Isso significa que a quantidade $\|\gamma\|^2$ é invariante sob a mudança de base da canônica para outra qualquer e consequentemente também é invariante sob mudança entre quaisquer bases. Logo $\|\gamma\|^2$ é um escalar. O vetor $(h_1, \ldots, h_n)$ onde h_i são funções que dependem apenas de $\|\gamma\|$ também é um escalar.

1.5 Pseudovetores

Suponha um operador $R : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ que reflete um vetor em relação à coordenada y, ou seja, cuja representação matricial é

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, então temos

$$R\vec{a} = \sum_{i}^{3} \sum_{j}^{3} R_{ij} a_j \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}}$$

onde $R_{ij} = (-1)^{i+1}\delta_{ij}$.

Agora sejam $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Segue que

$$\begin{aligned} (R\vec{a}) \times (R\vec{b}) &= \sum_{ijk}^{3} \epsilon_{ijk} (R\vec{a})_i (R\vec{b})_j \hat{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}} \\ &= \sum_{ijk}^{3} \epsilon_{ijk} \sum_{l}^{3} R_{il} A_l \sum_{m}^{3} R_{jm} B_m \hat{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}} \\ &= \sum_{ijklm}^{3} \epsilon_{ijk} (-1)^{i+1} \delta_{il} (-1)^{j+1} \delta_{jm} A_l B_m \hat{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}} \\ &= \sum_{ijk}^{3} (-1)^{i+j} \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

isto é, o vetor $(R\vec{a}) \times (R\vec{b})$ possui as componentes x e z invertidas em relação ao vetor $\vec{a} \times \vec{b}$. Consequentemente temos

$$(R\vec{a}) \times (R\vec{b}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = -R \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$$

que é diferente de $R\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$. Esse comportamento anômalo também fica nítido ao inverter o sentido de todas as componentes. Seja agora K a matriz

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Temos que $K\vec{a} = -\vec{a}$ e portanto

$$(K\vec{a}) \times (K\vec{b}) = (-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b} \neq K \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$$

ou seja, o elemento $\vec{a} \times \vec{b}$ foi invariante sob a inversão dos eixos. Por causa desse comportamento anômalo, denominamos $\vec{a} \times \vec{b}$ de pseudovetor (ou vetor axial).

2 Espaço dos p-vetores

Definição 2.1 (Espaços 0-vetor e 1-vetor)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão n cujo corpo é $\mathbb{K}$. Define-se o espaço 0-vetor $\bigwedge^0 V = \mathbb{K}$ como sendo o corpo $\mathbb{K}$. O espaço 1-vetor $\bigwedge^1 V = V$ é definido como sendo o próprio espaço vetorial V.*

Definição 2.2 (Espaço 2-vetor)**.** *Dado o espaço vetorial em* (2.1)*, define-se $\bigwedge^2 V$ o espaço vetorial 2-vetor formado por todos os elementos u, denominados de bi-vetores, tais que podem ser escritos como*

$$u = x \wedge y \qquad \text{para algum } x, y \in V$$

com a operação binária $\wedge : [V \times V] \mapsto \bigwedge^2 V$, supondo x, y e z elementos de V e $a, b \in \mathbb{K}$, satisfazendo os dois axiomas:

Axioma 1 (Linearidade à direita)**.** $(ax + by) \wedge z = a(x \wedge z) + b(y \wedge z)$

Axioma 2 (Anticomutatividade)**.** $x \wedge y = -y \wedge x$

Denomina-se $x \wedge y$ de produto exterior (ou externo) dos vetores x e y.

Teorema 2.1 (Linearidade à esquerda)**.** $z \wedge (ax + by) = a(z \wedge x) + b(z \wedge y)$

Demonstração.

$$\begin{aligned} z \wedge (ax + by) &= -(ax + by) \wedge z \qquad \text{(Axioma 2)} \\ &= -a(x \wedge z) - b(y \wedge z) \qquad \text{(Axioma 1)} \\ &= a(z \wedge x) + b(z \wedge y) \qquad \text{(Axioma 2)} \end{aligned}$$

■

Teorema 2.2. $x \wedge x = 0$*, com* 0 *sendo o elemento nulo de* $\bigwedge^2 V$*.*

Demonstração. Devido ao axioma da anticomutatividade (2), temos

$$x \wedge x = -x \wedge x$$

e então

$$2(x \wedge x) = 0 \implies x \wedge x = 0$$

■

Agora sejam γ e ω elementos de V cujas representações na base ξ são

$$\gamma = \sum_i^n \gamma^i x_i \quad \text{e} \quad \omega = \sum_i^n \omega^i x_i$$

O produto exterior de γ com ω é

$$\gamma \wedge \omega = \left(\sum_i^n \gamma^i x_i \right) \wedge \left(\sum_j^n \omega^j x_j \right) = \sum_i^n \sum_j^n \gamma^i \omega^j (x_i \wedge x_j)$$

Devido ao teorema (2.2) e ao axioma (2), temos que os termos em que $i = y$ se anulam e os que aparecem com i e j trocados podem ser agrupados com um sinal de menos, resultando

$$\gamma \wedge \omega = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (\gamma^i \omega^j - \gamma^j \omega^i)(x_i \wedge x_j) \tag{14}$$

onde a soma é feita de forma que cada combinação de i e j seja feita apenas uma vez $(1 \leqslant j < i \leqslant n)$. Consequentemente a dimensão do espaço $\bigwedge^2 V$, que é o número de elementos $(x_i \wedge x_j)$ linearmente independentes, é dada por

$$\dim \bigwedge^2 V = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} 1 = \sum_{i=2}^{n} (i-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

Podemos generalizar criando um novo espaço vetorial $\bigwedge^3 V$ formado pelos elementos que são a aplicação do operador $\wedge$ entre um bi-vetor de $\bigwedge^2 V$ e um vetor de V, resultando em um tri-vetor.

Definição 2.3 (Espaço dos p-vetores)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão n com corpo $\mathbb{K}$. O espaço p-vetor $\bigwedge^p V$, com $1 \leqslant p \leqslant n$, é formado pela totalidade dos elementos u que podem ser escritos na forma*

$$u = \left(x_{q_1} \wedge x_{q_2} \wedge \ldots \wedge x_{q_p}\right) \tag{15}$$

com os p índices q_i satisfazendo $1 \leqslant q_1 < q_2 < \ldots < q_p \leqslant n$, $x_i \in V$ e tal operação entre vetores de V satisfazendo

1. *$y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p$ troca de sinal se dois elementos y_i forem trocados;*
2. *$y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p$ é o elemento nulo de $\bigwedge^p V$ se $y_i = y_j$ para algum $i \neq j$;*
3. *$(ax + by) \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p = a\,(x \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p) + b\,(y \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_p)$, e a mesma propriedade é válida se y_i for substituído por $ax + by$, com $a, b \in \mathbb{K}$ e $x, y \in V$.*

A dimensão do espaço $\bigwedge^p V$ é o número de elementos linearmente independentes dados pelas combinações dos índices q_i em (15), ou seja

$$\dim \bigwedge^p V = \binom{n}{p}$$

Se $p > n$, então $\bigwedge^p V$ é um espaço vetorial de um só elemento, o nulo, já que haverão $n + 1$ elementos linearmente dependentes e consequentemente o item 2 da definição (2.3) se aplica.

Se u for um elemento de $\bigwedge^p V$, então u pode ser escrito em termos de uma base $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de V na forma

$$u = \sum_{h_1 h_2 \ldots h_p} a^{h_1 h_2 \ldots h_n} \left(x_{h_1} \wedge x_{h_2} \wedge \ldots \wedge x_{h_p}\right)$$

onde os índices h_i satisfazem $1 \leqslant h_1 < h_2 < \ldots < h_p \leqslant n$. Ou seja, para cada conjunto $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_p\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ de p elementos temos uma coordenada $a^{h_1 h_2 \ldots h_n}$ associada a $x_{h_1} \wedge x_{h_2} \wedge \ldots \wedge x_{h_p}$. Podemos compactar tudo isso usando a notação

$$u = \sum_H a^H x_H$$

onde u é a soma sobre todas as possíveis combinações de índices H, com $a^H = a^{h_1 h_2 \ldots h_n}$ e $x_H = x_{h_1} \wedge x_{h_2} \wedge \ldots \wedge x_{h_p}$.

2.1 Determinantes

Dado um espaço vetorial V de dimensão n e corpo $\mathbb{K}$ e uma transformação linear $A : V \mapsto V$, iremos definir uma função g_A de n variáveis como

$$\begin{aligned} g_A : \bigtimes^n V &\longmapsto \bigwedge^n V \\ g_A(x_1, \ldots, x_n) &= Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge \ldots \wedge Ax_n \end{aligned}$$

onde $x_i \in V$ e $\bigtimes^n V$ é o conjunto das n-uplas contendo elementos de V (produto cartesiano). Equivalentemente podemos definir uma função f_A de uma variável em $\bigwedge^n V$ tal que

$$f_A : \bigwedge^n V \longmapsto \bigwedge^n V$$

$$f_A(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) = Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge \ldots \wedge Ax_n = g_A(x_1, \ldots, x_n) \qquad (16)$$

A dimensão de $\bigwedge^n V$ é 1, pois há somente uma única combinação de n índices em n elementos de qualquer base de V. Então suponha $u, v \in \bigwedge^n V$, $\Gamma = \{\xi_1\}$ uma base desse espaço no qual

$$u = \alpha_1 \xi_1 \quad \text{e} \quad v = \beta_1 \xi_1 \qquad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{K} \quad \alpha_1 \neq 0$$

e que $T(u) = v$ para alguma transformação linear $T : \bigwedge^n V \mapsto \bigwedge^n V$. Temos então que

$$T(\alpha_1 \xi_1) = \alpha_1 T(\xi_1) = \beta_1 \xi_1 \implies T(\xi_1) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \xi_1$$

Isso significa que qualquer transformação linear em um espaço vetorial de uma dimensão para ele próprio é meramente uma multiplicação por escalar. Então podemos reescrever (16) como sendo

$$Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge \ldots \wedge Ax_n = \gamma_A (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \qquad (17)$$

onde $\gamma_A \in \mathbb{K}$. Agora suponha que os elementos x_i formem uma base ξ de V e $[a_i^j]$ seja a representação matricial de A nessa base, ou seja,

$$Ax_i = \sum_j^n a_i^j x_j$$

então

$$\begin{aligned} Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge \ldots \wedge Ax_n &= \left(\sum_j^n a_1^j x_j \right) \wedge \left(\sum_k^n a_2^k x_k \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_q^n a_n^q x_q \right) \\ &= \sum_{jk\ldots q}^n a_1^j \cdot a_2^k \cdot \ldots \cdot a_n^q \, (x_j \wedge x_k \wedge \ldots \wedge x_q) \end{aligned}$$

Como $\bigwedge^n V$ é um espaço unidimensional, podemos escrever todos os termos $x_j \wedge x_k \wedge \ldots \wedge x_q$ em função de $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$. Os índices repetidos resultarão em termos nulos e os sinais dependerão se a permutação dos índices $j, k, \ldots, q$ for par ou ímpar em relação à sequência $1, 2, \ldots, n$. Podemos resumir tudo isso pela equação

$$Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge \ldots \wedge Ax_n = \left(\sum_{jk\ldots q}^n \epsilon_{jk\ldots q} a_1^j \cdot a_2^k \cdot \ldots \cdot a_n^q \right) (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \quad (18)$$

onde $\epsilon_{jk\ldots q}$ é a generalização do símbolo de Levi-Civita para n índices. Comparando as expressões (17) e (18), temos que

$$\gamma_A = \sum_{jk\ldots q}^n \epsilon_{jk\ldots q} a_1^j \cdot a_2^k \cdot \ldots \cdot a_n^q \quad (19)$$

A equação (19) coincide com uma das várias definições equivalentes de determinante da matriz A. Se $|A|$ é o determinante da matriz que representa a transformação linear A na base ξ, então $\gamma_A = |A|$. Isso nos motiva a fazer a seguinte definição:

Definição 2.4 (Determinante de transformações lineares)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão n, corpo $\mathbb{K}$ e $x_i \in V$. Seja também A uma transformação linear de V para V. Denominamos $|A| \in \mathbb{K}$ de determinante de A como sendo o escalar que relaciona*

$$Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge \ldots \wedge Ax_n = |A| \, (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$$

Usando a definição (2.4), podemos mostrar que

$$\begin{aligned} |AB| \, (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) &= ABx_1 \wedge ABx_2 \wedge \ldots \wedge ABx_n \\ &= A(Bx_1) \wedge A(Bx_2) \wedge \ldots \wedge A(Bx_n) \\ &= |A| \, (Bx_1 \wedge Bx_2 \wedge \ldots \wedge Bx_n) \\ &= |A| \cdot |B| \, (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \end{aligned}$$

Como $(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \neq 0$ se os elementos x_i forem linearmente independentes, concluímos que

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

Além disso, se A_1 é a matriz que representa a transformação linear A na base 1 e A_2 é a matriz que representa esse mesmo operador na base 2, temos que

$$A_2 = [I]_2^1 A_1 [I]_1^2$$

onde $[I]_j^i$ é a matriz mudança de base de i para j. Mas como $([I]_2^1)^{-1} = [I]_1^2$, segue que $|A_2| = \left|[I]_2^1 A_1 [I]_1^2\right| = |A_1|$. Isso significa que o determinante de A é um escalar, pois é invariante sob mudança de base.

2.2 Produto externo entre p-vetores

Podemos relacionar a operação $\wedge$ vista na definição (2.2) com as operações $\wedge$ vistas na definição (2.3) como sendo o mesmo operador, onde agora será definido como

$$\wedge : \bigwedge^{p} V \times \bigwedge^{q} V \longmapsto \bigwedge^{p+q} V$$

e que satisfaz

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) \wedge (y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q) = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q$$

Segue imediatamente disso que

1. O operador $\wedge$ é associativo, ou seja, $x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y \wedge z = (x \wedge y) \wedge z$.
2. O operador $\wedge$ é comutativo se pq for par e é anticomutativo se pq for ímpar, ou seja, $x \wedge y = (-1)^{pq} y \wedge x$.
3. O operador $\wedge$ continua distributivo, ou seja, $x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z$.

O segundo item pode ser rapidamente provado ao mover cada y_i para à esquerda, começando com y_1 até y_q, introduzindo um fator $(-1)^p$ a cada operação:

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) \wedge (y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q) = \\ (-1)^p y_1 \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q$$

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) \wedge (y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q) = \\ ((-1)^p)^2 y_1 \wedge y_2 \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_3 \wedge \ldots \wedge y_q$$

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) \wedge (y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q) = \\ ((-1)^p)^q y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$$

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) \wedge (y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q) = \\ (-1)^{pq} (y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_q) \wedge (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p)$$

2.3 Produto interno

2.3.1 Produto entre 1-vetores

Agora suponha que o espaço vetorial V esteja munido de um produto interno, operação binária $V \times V \mapsto \mathbb{K}$ que satisfaça os seguintes axiomas:

Axioma 3 (Linearidade à direita)**.** $\langle z, ax+by\rangle = a\langle z,x\rangle + b\langle z,y\rangle \;\; \forall x,y,z \in V,\;\; a,b \in \mathbb{K}$.

Axioma 4 (Simetria)**.** $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \;\; \forall x,y \in V$. *Isso em conjunto com o axioma* (3) *implica na linearidade à esquerda.*

Axioma 5 (Não degenerado)**.** *Dado* $x \in V$*, se* $\langle x,y\rangle = 0$ *para todo* $y \in V$*, então* $x = 0$*.*

Definição 2.5 (Matriz de Gram)**.** *Seja* $\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *um conjunto de elementos do espaço vetorial* V*. Definimos* $[b_{ij}] = [\langle x_i, x_j\rangle]$ *de matriz de Gram de* ξ*:*

$$[\langle x_i, x_j\rangle] = \begin{bmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \ldots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \ldots & \langle x_2,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \ldots & \langle x_n,x_n\rangle \end{bmatrix}$$

Teorema 2.3. *Se* $\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *é uma base do espaço vetorial* V*, então o determinante da matriz de Gram de* ξ *é não nulo.*

Demonstração. Se $\det[\langle x_i, x_j\rangle]$ fosse nulo, então existiria alguma dependência linear entre duas ou mais linhas ou colunas de $[\langle x_i, x_j\rangle]$. Suponha que a primeira linha seja uma combinação linear das outras, ou seja, existe $(a^2, a^3, \ldots, a^n) \neq 0$ com $a^i \in \mathbb{K}$ tal que

$$\langle x_1, x_j\rangle = \sum_{i\neq 1}^{n} a^i \langle x_i, x_j\rangle$$

Subtraindo $\langle x_1, x_j\rangle$ de ambos os lados e fazendo $a^1 = -1$, teremos

$$\sum_{i}^{n} a^i \langle x_i, x_j\rangle = \left\langle \sum_{i}^{n} a^i x_i \;,\; x_j \right\rangle = 0$$

Mas isso é válido para qualquer x_j, e consequentemente para qualquer elemento de V. Logo o elemento $\sum a^i x_i$ é o elemento nulo de V devido ao axioma (5). Mas como $(a^1, a^2, a^3, \ldots, a^n) \neq 0$, isso também significa que o conjunto ξ é linearmente dependente, o que contradiz a hipótese de ξ ser uma base. ∎

Denominamos $\beta = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ de subconjunto ortonormal de V se

$$\langle y_i, y_j\rangle = \pm\delta_{ij} \quad \forall y_i, y_j \in \beta$$

Teorema 2.4. *Todo espaço vetorial* V *munido de produto interno possui uma base ortonormal.*

Demonstração. Seja $\xi = \{x_1, \ldots, x_m\}$ o conjunto com maior número de elementos de V tais que

$$\langle x_i, x_j \rangle = \pm\delta_{ij}$$

Suponha m escalares a^i tais que

$$\sum_i^m a^i x_i = 0$$

Aplicando o produto interno em ambos os lados em relação a x_j, obteremos

$$\sum_i^m a^i \langle x_i, x_j \rangle = \langle 0, x_j \rangle = 0$$

$$0 = \sum_i^m \pm a^i \delta_{ij} = \pm a^j$$

e consequentemente ξ é um conjunto linearmente independente. Logo a dimensão do subespaço vetorial gerado por ξ, que denotaremos de M, é m.

Se $m = \dim V = n$, então ξ é uma base ortonormal de V. Se $m < n$, suponha K o conjunto de todos os elementos y de V que são ortogonais a todos os elementos de ξ, ou seja,

$$\langle x_i, y \rangle = 0 \quad \forall x_i \in \xi \quad \forall y \in K$$

O conjunto K também é um subespaço vetorial, pois a soma e multiplicação por escalar de dois elementos de K continua ortogonal a ξ, K inclui o elemento nulo. Se $\dim V - \dim M = n - m$ é a dimensão do subespaço vetorial M^C complementar a M, segue que $M^C \subseteq K$ (pois todos os elementos que não são combinações lineares de ξ acabam sendo ortogonais a ξ, uma vez que suas coordenadas nesses elementos, dadas pelo produto interno, serão nulas) e consequentemente

$$\dim K \geqslant \dim V - \dim M = n - m$$

$$n \leqslant m + \dim K$$

além de que a totalidade dos elementos que pertencem a M e K formam o espaço V.

Se existir algum elemento de V que pertença tanto a M quanto a K, então ele é ortogonal a todos os elementos de ξ (por pertencer a K) assim como ortogonal a todos os elementos de K (por pertencer a M) e consequentemente é ortogonal a todos os elementos de V. Esse elemento só pode ser 0 devido ao axioma (5). Isso implica que M e K são mutualmente exclusivos (exceto pelo 0) e então

$$n = m + \dim K$$

Além disso, como 0 é o único elemento que é ortogonal a todos de K, então também podemos definir o produto interno dentro do subespaço K idêntico ao de V.

Agora seja $u \in K$ tal que $\langle u, u \rangle \neq 0$. A existência de u é garantida pelo fato de que se $\langle u, u \rangle = 0$ para todo $u \in K$, então

$$\langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = 2 \langle u, v \rangle = 0$$

para todo $u, v \in K$. Como u e v também são ortogonais aos elementos de M, então são ortogonais a todos de V e consequentemente $u = v = 0$, o que viola o axioma (5) da não-degenerescência.

Fazendo $x_{m+1} = \dfrac{u}{\sqrt{\langle u, u \rangle}}$, obteremos

$$\langle x_i, x_{m+1} \rangle = \pm \delta_{i,m+1} \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m, m+1\}$$

uma vez que u é ortogonal a todos de ξ por pertencer a K e está normalizado. Então conseguimos construir um novo conjunto $\xi_0 = \{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$ tal que

$$\langle x_i, x_j \rangle = \pm \delta_{ij}$$

que tem mais elementos do que ξ, que supomos ser o máximo. A única saída para esse absurdo é que $m = n$ e então ξ é uma base ortonormal de V. ■

Teorema 2.5 (Produto interno como funcional). *Seja α um funcional linear em V. Então existe um único $u \in V$ tal que*

$$\alpha(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in V$$

Demonstração. Seja $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base ortonormal de V. Podemos escrever v em termos da base ξ:

$$v = \sum_i^n v^i x_i$$

e então

$$\alpha(v) = \alpha \left(\sum_i^n v^i x_i \right) = \sum_i^n v^i \alpha(x_i)$$

Agora seja u um elemento de V cuja representação na base ξ seja $u_i = \pm \alpha(x_i)$, ou seja,

$$u = \sum_i^n \pm \alpha(x_i) x_i \tag{20}$$

Segue disso que

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_i^n \pm \alpha(x_i) x_i \; , \; \sum_j^n v^j x_j \right\rangle = \sum_i^n \sum_j^n \pm v^j \alpha(x_i) \langle x_i, x_j \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_i^n \sum_j^n v^j \alpha(x_i) \delta_{ij} = \sum_i^n v^i \alpha(x_i) = \alpha(v)$$

Como só há uma representação de u em uma dada base (ou equivalentemente só há um elemento u no qual as suas coordenadas na base ξ são $u_i = \pm \alpha(x_i)$), segue que u é único. ■

Teorema 2.6 (Caso particular da Lei da inércia de Sylvester)**.** *Dada uma base ortonormal qualquer $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de um espaço vetorial V munido de um produto interno específico, temos que se*

$$\sum_i \langle x_i, x_i \rangle = r - s$$

onde r é a quantidade de elementos x_j de ξ tais que $\langle x_j, x_j \rangle = 1$ e s a quantidade de elementos x_k de ξ tais que $\langle x_k, x_k \rangle = -1$, então para qualquer outra base ortonormal $\beta = \{y_1, \ldots, y_n\}$ é válido

$$\sum_i \langle y_i, y_i \rangle = r - s$$

Denominamos o valor $t = r - s$ de assinatura do produto interno.

Demonstração. Seja p o número de elementos y_i de β tais que $\langle y_i, y_i \rangle = 1$ e q o número de elementos y_j de β tais que $\langle y_j, y_j \rangle = -1$. Como há n elementos da nas bases ξ e β, temos que

$$r + s = p + q = n \tag{21}$$

Suponha que $r \neq p$ e que, sem perda de generalidade, $r < p$. Suponha também que a ordem das bases ξ e β são tais que os positivos definidos apareçam primeiro, ou seja, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $\langle x_i, x_i \rangle = 1$ e também $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $\langle y_i, y_i \rangle = 1$.

Seja $f : V \mapsto \mathbb{K}^{n+r-p}$ uma função dada por

$$f(z) = (\langle z, x_1 \rangle, \langle z, x_2 \rangle, \ldots, \langle z, x_r \rangle, \langle z, y_{p+1} \rangle, \ldots, \langle z, y_n \rangle) \quad \forall z \in V$$

Como $r < p$, temos $n + r - p < n$ e consequentemente essa transformação (que é linear já que $\mathbb{K}^{n+r-p}$ é um espaço vetorial e o produto interno é linear) passa de um espaço de dimensão n para outro de dimensão menor $n + r - p = \gamma$. A matriz F que representa essa transformação linear é de ordem $\gamma \times n$, com $\gamma < n$. Então a equação matricial $Fz = 0$ tem soluções além da trivial[7]. Agora seja $u \in V$ um elemento não-nulo que satisfaça $Fu = 0$, ou seja, $f(u) = (0, 0, \ldots, 0)$. Isso é equivalente a

$$\langle u, x_i \rangle = 0 \quad \forall i \leqslant r \quad \text{e} \quad \langle u, y_i \rangle = 0 \quad \forall i : \ p < i \leqslant n$$

Suponha que u possa ser escrito nas formas

$$u = \sum_{j=1}^{n} a^j x_j = \sum_{j=1}^{n} b^j y_j$$

Para todo $i \leqslant r$, temos

$$\langle u, x_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} a^j \langle x_j, x_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} a^j \delta_{ij} \langle x_i, x_i \rangle = a^i = 0$$

[7]O posto da matriz F obrigatoriamente será menor do que o número de colunas, no que implica na nulidade de f maior que zero.

assim como $b^i = 0 \ \forall i : \ p < i \leqslant n$. Podemos calcular $\langle u, u \rangle$ de duas formas, uma usando a base ξ e a outra usando a base β:

$$
\begin{aligned}
\langle u, u \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a^j a^k \langle x_j, x_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a^j a^k \delta_{jk} \langle x_j, x_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} (a^j)^2 \langle x_j, x_j \rangle \\
&= \sum_{j=r+1}^{n} (a^j)^2 \langle x_j, x_j \rangle < 0
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} (b^j)^2 \langle y_j, y_j \rangle = \sum_{j=1}^{p} (b^j)^2 \langle y_j, y_j \rangle > 0
$$

Logo temos $\langle u, u \rangle < 0$ e $\langle u, u \rangle > 0$, que é um absurdo. Portanto $p = r$ e consequentemente da equação (21) temos $q = s$ e

$$
\sum_i \langle y_i, y_i \rangle = p - q = r - s
$$

■

2.3.2 Produto entre p-vetores

Agora sejam $u, v \in \bigwedge^p V$ p-vetores. Iremos definir o produto interno no espaço $\bigwedge^p V$ como sendo uma operação dada por

$$
\begin{aligned}
\langle , \rangle : \bigwedge^p V \times \bigwedge^p V &\longmapsto \mathbb{K} \\
\langle u, v \rangle &= \det[\langle u_i, v_j \rangle] \qquad (22)
\end{aligned}
$$

onde

$$
u = u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \quad \text{e} \quad v = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p
$$

com $u_i, v_j \in V$.

Suponha que $v, w, z \in \bigwedge^p V$, $u_i \in V$, $a, b \in \mathbb{K}$ e que

$$
\begin{aligned}
v &= v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p \\
f &= (aw + bz) \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \\
g &= w \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \\
h &= z \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p
\end{aligned}
$$

de forma que

$$
\begin{aligned}
f &= (aw) \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p + (bz) \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \\
&= a(w \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p) + b(z \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p) \\
&= ag + bh
\end{aligned}
$$

Segue então que

$$\langle v, f\rangle = \det \begin{bmatrix} \langle v_1, (aw+bz)\rangle & \langle v_1, u_2\rangle & \dots & \langle v_1, u_p\rangle \\ \langle v_2, (aw+bz)\rangle & \langle v_2, u_2\rangle & \dots & \langle v_2, u_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, (aw+bz)\rangle & \langle v_p, u_2\rangle & \dots & \langle v_p, u_p\rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle v, f\rangle = \det \begin{bmatrix} a\langle v_1, w\rangle + b\langle v_1, z\rangle & \langle v_1, u_2\rangle & \dots & \langle v_1, u_p\rangle \\ a\langle v_2, w\rangle + b\langle v_2, z\rangle & \langle v_2, u_2\rangle & \dots & \langle v_2, u_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\langle v_p, w\rangle + b\langle v_p, z\rangle & \langle v_p, u_2\rangle & \dots & \langle v_p, u_p\rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle v, f\rangle = \det \begin{bmatrix} a\langle v_1, w\rangle & \langle v_1, u_2\rangle & \dots & \langle v_1, u_p\rangle \\ a\langle v_2, w\rangle & \langle v_2, u_2\rangle & \dots & \langle v_2, u_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\langle v_p, w\rangle & \langle v_p, u_2\rangle & \dots & \langle v_p, u_p\rangle \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b\langle v_1, z\rangle & \langle v_1, u_2\rangle & \dots & \langle v_1, u_p\rangle \\ b\langle v_2, z\rangle & \langle v_2, u_2\rangle & \dots & \langle v_2, u_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b\langle v_p, z\rangle & \langle v_p, u_2\rangle & \dots & \langle v_p, u_p\rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle v, f\rangle = a \cdot \det \begin{bmatrix} \langle v_1, w\rangle & \langle v_1, u_2\rangle & \dots & \langle v_1, u_p\rangle \\ \langle v_2, w\rangle & \langle v_2, u_2\rangle & \dots & \langle v_2, u_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, w\rangle & \langle v_p, u_2\rangle & \dots & \langle v_p, u_p\rangle \end{bmatrix} + b \cdot \det \begin{bmatrix} \langle v_1, z\rangle & \langle v_1, u_2\rangle & \dots & \langle v_1, u_p\rangle \\ \langle v_2, z\rangle & \langle v_2, u_2\rangle & \dots & \langle v_2, u_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, z\rangle & \langle v_p, u_2\rangle & \dots & \langle v_p, u_p\rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle v, f\rangle = a\langle v, g\rangle + b\langle v, h\rangle$$

Mas como $f = ag + bh$, temos que

$$\langle v, ag + bh\rangle = a\langle v, g\rangle + b\langle v, h\rangle$$

O mesmo é válido se substituirmos u_i por $(aw+bz)$, w e z em f, g e h respectivamente ou então introduzir uma soma de três ou mais elementos de V em u_i. Portanto esse produto satisfaz o axioma (3) da linearidade.

Além disso, o produto continua simétrico:

$$\langle v, u\rangle = \det[\langle v_i, u_j\rangle] = \det[\langle u_j, v_i\rangle] = \det[\langle u_i, v_j\rangle] = \langle u, v\rangle$$

uma vez que o determinante é invariante sob a transposta.

Para verificar a não-degenerescência desse produto, suponha que $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ seja uma base ortonormal de V e o conjunto H seja uma das combinações de p índices h_i, com $h_i < h_{i+1}$. Segue que todos os elementos x_H para todos os H formam uma base de $\bigwedge^p V$. Sendo K uma outra combinação de p índices k_j, temos

$$\langle x_H, x_K \rangle = \det\big[\langle x_{h_i}, x_{k_j} \rangle\big]$$

com $x_H = x_{h_1} \wedge \ldots \wedge x_{h_p}$ e $x_K = x_{k_1} \wedge \ldots \wedge x_{k_p}$. Se H e K forem a mesma combinação de índices, teremos

$$\langle x_{h_i}, x_{k_j} \rangle = \langle x_{h_i}, x_{h_j} \rangle = \pm\delta_{ij}$$

o que significa que a matriz de Gram será diagonal com elementos ± 1 e portanto o determinante será ± 1. Isso significa que $\langle x_H, x_K \rangle = \pm 1$.

E se não forem a mesma combinação, existirá pelo menos um índice q que pertencerá apenas a H ou a K. Logo, supondo $q \in H$, temos $\langle x_q, x_{k_j} \rangle = 0$ para todos os índices k_j e consequentemente haverá uma linha nula na matriz de Gram[8]. Segue disso que $\langle x_H, x_K \rangle = 0$.

Para quaisquer combinações H e K, temos o resultado mais geral

$$\langle x_H, x_K \rangle = \pm\delta_{H,K} \tag{23}$$

Isso significa que os p-vetores x_H formam uma base Γ ortonormal de $\bigwedge^p V$, característica herdada da ortonormalidade dos elementos x_i.

Finalmente, uma vez que garantimos a existência de uma base ortonormal de $\bigwedge^p V$, temos que se existir algum p-vetor u tal que seja ortogonal a todos os elementos de $\bigwedge^p V$ e ele puder ser escrito na forma

$$u = \sum_H u^H x_H$$

então para todo elemento x_K da base Γ temos

$$\langle u, x_K \rangle = \left\langle \sum_H u^H x_H \ , \ x_K \right\rangle = \sum_H u^H \langle x_H, x_K \rangle = \sum_H u^H (\pm\delta_{H,K}) = \pm u^K = 0$$

o que implica $u = 0$ e isso prova a não-degenerescência do produto interno entre p-vetores definida em (22).

Se $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ for uma base ortonormal de V, então o elemento $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ forma uma base do espaço $\bigwedge^n V$. Portanto

$$\langle x, x \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle \cdot \langle x_2, x_2 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle x_n, x_n \rangle = 1^r(-1)^s = (-1)^s$$

Mas temos que

$$s = \frac{1}{2}(2s) = \frac{1}{2}(2(n-r)) = \frac{1}{2}(2n - 2r) = \frac{1}{2}(n + n - 2r) = \frac{1}{2}(n + (r+s) - 2r)$$
$$s = \frac{1}{2}(n + r + s - 2r) = \frac{1}{2}(n - (r - s)) = \frac{1}{2}(n - t)$$

[8]Também haverá pelo menos uma coluna nula, já que haverá um outro índice l que está em K mas não em H.

onde $t = r - s$ é a assinatura do produto interno. Logo

$$\langle x, x \rangle = (-1)^{(n-t)/2} \tag{24}$$

2.4 Operador estrela

Seja $u \in \bigwedge^p V$ e $v \in \bigwedge^{n-p} V$. A transformação

$$v \mapsto u \wedge v$$

é linear e transforma um elemento do espaço $\bigwedge^{n-p} V$ para um elemento do $\bigwedge^n V$. Então se $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base ortonormal de V, $u \wedge v$ pode ser descrito como um escalar vezes um n-vetor $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ normalizado, já que x sozinho já forma uma base do espaço $\bigwedge^n V$. Ou seja,

$$u \wedge v = f_u(v) x$$

onde $f_u : \bigwedge^{n-p} V \longmapsto \mathbb{K}$ é um funcional baseado no elemento u. Se $a, b \in \mathbb{K}$ e $w \in \bigwedge^{n-p} V$, então

$$\begin{aligned} &f_u(av + bw)x = u \wedge (av + bw) \\ &f_u(av + bw)x = a(u \wedge v) + b(u \wedge w) = [a f_u(v) + b f_u(w)]x \end{aligned}$$

o que implica que o funcional f_u é linear. Portanto o teorema (2.5) (aplicado ao espaço vetorial $\bigwedge^{n-p} V$) garante que existe um único $n - p$ vetor $*u$ tal que

$$f_u(v) = \langle *u, v \rangle$$

e consequentemente

$$u \wedge v = \langle *u, v \rangle x \tag{25}$$

Como há apenas um elemento $*u \in \bigwedge^{n-p} V$ para cada $u \in \bigwedge^p V$, podemos definir uma função, denominada de operador estrela $(*)$, dada por

$$\begin{aligned} &* : \bigwedge^{p} V \longmapsto \bigwedge^{n-p} V \\ &*(u) = (*u) \implies u \wedge v = \langle *u, v \rangle x \quad \forall v \in \bigwedge^{n-p} V \end{aligned}$$

Naturalmente essa definição depende da base escolhida. Se $y = -x$, então y também está normalizado e também forma uma base de $\bigwedge^n V$. Consequentemente

$$u \wedge v = -\langle *u, v \rangle y = \langle -(*u), v \rangle y$$

no que acarreta na mudança de sinal do operador estrela. Escolheremos uma base $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ específica que adotaremos como orientação positiva. Uma outra base $y = y_1 \wedge \ldots \wedge y_n$ de $\bigwedge^n V$ terá orientação positiva se o determinante da matriz A que transforma a base x em y for positiva, ou seja,

$$y_1 \wedge \ldots \wedge y_n = Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge \ldots \wedge Ax_n = |A| \, (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$$

com $|A| > 0$.

Podemos verificar que o operador estrela é linear, pois dado $u, w \in \bigwedge^p V$, $a, b \in \mathbb{K}$ e $v \in \bigwedge^{n-p} V$, temos

$$(au + bw) \wedge v = \langle *(au + bw), v \rangle x$$

mas também

$$\begin{aligned} (au + bw) \wedge v = (u \wedge av) + (w \wedge bv) &= \langle *u, av \rangle x + \langle *w, bv \rangle x \\ &= \langle a(*u), v \rangle x + \langle b(*w), v \rangle x = \langle a(*u) + b(*w), v \rangle x \end{aligned}$$

e portanto

$$\langle *(au + bw), v \rangle x = \langle a(*u) + b(*w), v \rangle x$$

$$(\langle *(au + bw), v \rangle - \langle a(*u) + b(*w), v \rangle) x = 0$$

Como x é uma base, temos $x \neq 0$ e

$$\langle *(au + bw), v \rangle = \langle a(*u) + b(*w), v \rangle$$

$$\langle *(au + bw) - (a(*u) + b(*w)), v \rangle = 0$$

Como isso é válido para todo $v \in \bigwedge^{n-p} V$, usamos o axioma (5) de não degenerescência para concluir que

$$*(au + bw) = a(*u) + b(*w) \tag{26}$$

2.4.1 Calculando o operador estrela

Agora suponha $u = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$, onde $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base ortonormal V com orientação positiva. Seja $v = x_K$, onde K é uma combinação dos $n - p$ índices de 1 a n. Então

$$u \wedge v = u \wedge x_K = \langle *u, x_K \rangle x \tag{27}$$

mas também

$$u \wedge v = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge x_{k_1} \wedge x_{k_2} \wedge \ldots \wedge x_{k_{n-p}}$$

que pertence ao espaço $\bigwedge^n V$. Isso significa que se houver algum índice k_i pertencendo ao conjunto $\{1, 2, \ldots, p\}$, então haverá índice repetido e $u \wedge v = 0$. O elemento $u \wedge v$ só pode ser diferente do nulo se K for exatamente a combinação $\{p+1, p+2, \ldots, n\}$. Por outro lado, isso também significa (pelo lado direito da equação (27)) que $*u$ é ortogonal a todo x_K exceto se $K = \{p+1, p+2, \ldots, n\}$. Isso significa que

$$*u = c \cdot x_K = c \cdot (x_{p+1} \wedge x_{p+2} \wedge \ldots \wedge x_n)$$

onde $c \in \mathbb{K}$ é algum escalar. Para determinar c, basta lembrar que $x = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$. Então

$$u \wedge v = x = \langle *u, x_K \rangle x = c \langle x_K, x_K \rangle x = (\pm c) x$$

Segue disso que $c = 1$ se $\langle x_K, x_K \rangle = 1$ e $c = -1$ se $\langle x_K, x_K \rangle = -1$. Ou seja,

$$c = \langle x_K, x_K \rangle$$

e então

$$*u = \langle x_K, x_K \rangle x_K$$

Esse é um caso particular onde $u = x_{h_1} \wedge \ldots x_{h_p}$ com $h_i = i$. Se H é uma combinação qualquer de p índices, então K será o conjunto complementar de H em relação ao conjunto de índices $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, de forma que $H \cup K = I$ e $H \cap K = \varnothing$ para que $u \wedge v \neq 0$. Logo

$$*(x_H) = \langle x_K, x_K \rangle x_K \tag{28}$$

Sabendo como que o operador estrela age em um elemento da base de $\bigwedge^p V$, então também sabemos operar em qualquer p-vetor devido à linearidade (26).

Além disso, devido à relação de comutação do produto exterior entre um p-vetor e um q-vetor, temos

$$x_K \wedge x_H = (-1)^p (-1)^{n-p} (x_H \wedge x_K) = (-1)^{p(n-p)} (x_H \wedge x_K)$$

e consequentemente

$$x_K \wedge x_H = (-1)^{p(n-p)} x = \langle *(x_K), x_H \rangle x$$

Novamente é necessário que $*(x_K) = d \cdot x_H$ para algum $d \in \mathbb{K}$ para que $x_K \wedge x_H \neq 0$ e consequentemente

$$(-1)^{p(n-p)} x = d \langle x_H, x_H \rangle x$$

Segue disso que

$$(-1)^{p(n-p)} = d \langle x_H, x_H \rangle$$

Multiplicando ambos os membros por $\langle x_H, x_H \rangle$ e sabendo que $(\langle x_H, x_H \rangle)^2 = 1$, obtemos

$$d = (-1)^{p(n-p)} \langle x_H, x_H \rangle$$

no que implica

$$*(x_K) = (-1)^{p(n-p)} \langle x_H, x_H \rangle x_H \tag{29}$$

Note que há uma diferença entre aplicar o operador estrela a um p-vetor (equação 28) ou a um n-p vetor (equação 29).

Agora note também que aplicando o operador estrela à equação (28) obteremos

$$*(*x_H) = \langle x_K, x_K \rangle (*x_K) = (-1)^{p(n-p)} \langle x_K, x_K \rangle \langle x_H, x_H \rangle x_H$$

Como os vetores x_{h_i} são ortogonais, assim como x_{k_i}, segue que as matrizes de Gram $[\langle x_{h_i}, x_{h_j} \rangle]$ e $[\langle x_{k_i}, x_{k_j} \rangle]$ são diagonais. Além disso, H e K são conjuntos complementares entre si e consequentemente a multiplicação de $\langle x_K, x_K \rangle$ com

$\langle x_H, x_H \rangle$ é totalmente equivalente ao determinante da matriz de Gram do n-vetor $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$. Isso significa que

$$\langle x_K, x_K \rangle \langle x_H, x_H \rangle = \langle x, x \rangle \tag{30}$$

Mas da equação (24) temos $\langle x, x \rangle = (-1)^{(n-t)/2}$, onde t é a assinatura do produto interno e portanto

$$*(*x_H) = (-1)^{p(n-p)}(-1)^{(n-t)/2} x_H = (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2} x_H$$

Devido à linearidade do operador estrela, segue que para qualquer p-vetor u é válido

$$*(*u) = (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2} u$$

Por último, seja $u \in \bigwedge^p V$. Então

$$u \wedge (*x_H) = \langle *u, *x_H \rangle x$$

O único elemento da base de p-vetores que gera u que não anula essa equação é x_H e portanto

$$x_H \wedge (*x_H) = x_H \wedge (\langle x_K, x_K \rangle x_K) = \langle x_K, x_K \rangle (x_H \wedge x_K) = \langle x_K, x_K \rangle x$$

Mas multiplicando (30) por $\langle x_H, x_H \rangle$ em ambos os lados, obtemos

$$\langle x_K, x_K \rangle = \langle x_H, x_H \rangle \langle x, x \rangle = \langle x_H, x_H \rangle (-1)^{(n-t)/2}$$

e então

$$x_H \wedge (*x_H) = (-1)^{(n-t)/2} \langle x_H, x_H \rangle x$$

Agora se u, v forem dois p-vetores quaisquer de forma que

$$u = \sum_H a^H x_H \quad \text{e} \quad v = \sum_{H'} b^{H'} x_{H'}$$

então

$$u \wedge (*v) = \sum_{H,H'} a^H b^{H'} (x_H \wedge *(x_{H'})) = \sum_{H,H'} a^H b^{H'} (x_H \wedge *(x_H)) \delta_{HH'}$$

$$u \wedge (*v) = \sum_H a^H b^H (-1)^{(n-t)/2} \langle x_H, x_H \rangle x$$

$$u \wedge (*v) = (-1)^{(n-t)/2} \left[\sum_H a^H b^H \langle x_H, x_H \rangle \right] x$$

Por outro lado, temos

$$\langle u, v \rangle = \sum_{H,H'} a^H b^{H'} \langle x_H, x_{H'} \rangle = \sum_{H,H'} a^H b^{H'} \langle x_H, x_H \rangle \delta_{HH'}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_H a^H b^H \langle x_H, x_H \rangle$$

e portanto

$$u \wedge (*v) = (-1)^{(n-t)/2} \langle u, v \rangle x$$

Note que trocar u com v e vice-versa não altera o resultado, já que o produto interno é simétrico. Consequentemente

$$u \wedge (*v) = v \wedge (*u) \tag{31}$$

Exemplo 2.1 (Produto vetorial). *Seja* $\mathbb{R}^3$ *o espaço euclidiano real com a base canônica ortonormal* $\xi = \{\hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_3}}\}$ *que convencionamos como orientação positiva e com produto interno definido por*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

onde

$$\vec{x} = \sum_i^3 x^i \hat{\mathbf{e_i}} \quad e \quad \vec{y} = \sum_i^3 y^i \hat{\mathbf{e_i}}$$

Definimos o produto vetorial $\vec{x} \times \vec{y}$ *pela expressão*

$$\vec{x} \times \vec{y} = *(\vec{x} \wedge \vec{y})$$

Segue disso que

$$\vec{x} \times \vec{y} = * \left(\sum_{ij} x^i y^j (\hat{\mathbf{e_i}} \wedge \hat{\mathbf{e_j}}) \right)$$

$$\vec{x} \times \vec{y} = *((x^1y^2 - x^2y^1)\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}}) + *((x^1y^3 - x^3y^1)\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}}) + \\ *((x^2y^3 - x^3y^2)\hat{\mathbf{e_2}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}})$$

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x^1y^2 - x^2y^1) * (\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}}) + (x^1y^3 - x^3y^1) * (\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}}) + \\ (x^2y^3 - x^3y^2) * (\hat{\mathbf{e_2}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}})$$

Mas também

$$\begin{aligned} *(\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}}) &= \langle \hat{\mathbf{e_3}}, \hat{\mathbf{e_3}} \rangle \hat{\mathbf{e_3}} = \hat{\mathbf{e_3}} \\ *(\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}}) &= -\langle \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_2}} \rangle \hat{\mathbf{e_2}} = -\hat{\mathbf{e_2}} \\ *(\hat{\mathbf{e_2}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}}) &= \langle \hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_1}} \rangle \hat{\mathbf{e_1}} = \hat{\mathbf{e_1}} \end{aligned}$$

Note o sinal trocado em $*(\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}})$ *devido à orientação da base, pois sabendo que* $*(\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}}) = \gamma \hat{\mathbf{e_2}}$ *com* $\gamma = \pm 1$, *então da equação* (25) *temos*

$$(\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}}) \wedge \hat{\mathbf{e_2}} = \langle *(\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}}), \hat{\mathbf{e_2}} \rangle (\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}})$$

$$(\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}}) = \langle \gamma \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_2}} \rangle (\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}})$$

$$-(\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}}) = \gamma \langle \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_2}} \rangle (\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}})$$

$$-\gamma (\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}}) = (\hat{\mathbf{e_1}} \wedge \hat{\mathbf{e_2}} \wedge \hat{\mathbf{e_3}})$$

Segue disso que γ *precisa ser* -1. *E então*

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x^1y^2 - x^2y^1)\hat{\mathbf{e_3}} + (x^3y^1 - x^1y^3)\hat{\mathbf{e_2}} + (x^2y^3 - x^3y^2)\hat{\mathbf{e_1}}$$

Exemplo 2.2 (Produto escalar)**.** *Dado* $\vec{x} = x_1\hat{\mathbf{i}} + x_2\hat{\mathbf{j}} + x_3\hat{\mathbf{k}}$ *um elemento do* $\mathbb{R}^3$ *e* ω_y *o 2-vetor dado por*

$$\omega_y = y_1(\hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{k}}) + y_2(\hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{i}}) + y_3(\hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{j}})$$

com $\vec{y} = y_1\hat{\mathbf{i}} + y_2\hat{\mathbf{j}} + y_3\hat{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^3$*, então*

$$\vec{x} \wedge \omega_y = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)\,(\hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{k}})$$

Logo

$$*(\vec{x} \wedge \omega_y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Por outro lado, temos que $*(\vec{y}) = \omega_y$*, já que*

$$*(\hat{\mathbf{i}}) = \hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{k}}$$
$$*(\hat{\mathbf{j}}) = \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{i}}$$
$$*(\hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{j}}$$

Então

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = *(\vec{x} \wedge *(\vec{y}))$$

Note que de (31) *temos*

$$*(\vec{x} \wedge *(\vec{y})) = *(\vec{y} \wedge *(\vec{x})) = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

o que implica na conhecida propriedade simétrica $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$*.*

Exemplo 2.3 (Produto escalar triplo)**.** *Seja* $\mathbb{R}^3$ *o mesmo espaço euclidiano real do exemplo* (2.1)*. Se* $\vec{z} = \sum z^i \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}}$*, então*

$$\vec{x} \wedge \vec{y} \wedge \vec{z} = \sum_{ijk} x^i y^j z^k (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} x^i y^j z^k (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}})$$

Logo

$$*(\vec{x} \wedge \vec{y} \wedge \vec{z}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} x^i y^j z^k * (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} x^i y^j z^k$$

que é exatamente o produto escalar triplo, definido pela equação (3)*. Logo*

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = *(\vec{x} \wedge \vec{y} \wedge \vec{z})$$

2.5 Transformações lineares

Vimos na seção (2.1) o caso particular das transformações lineares que levam um conjunto a ele próprio. Agora consideremos A uma transformação linear que leva um espaço vetorial M de dimensão m para um outro espaço vetorial N

de dimensão n. Dessa forma, dado $x = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p$, com $x_i \in M$, podemos construir uma nova transformação linear $\bigwedge^p A$ dada por

$$\left(\bigwedge^p A\right)(x) : \bigwedge^p M \mapsto \bigwedge^p N$$
$$\left(\bigwedge^p A\right)(x) = Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge \ldots \wedge Ax_p$$

Denotamos $\bigwedge^p A$ de p-ésima potência exterior de A. A linearidade de A e a multilinearidade do produto exterior garantem que $\bigwedge^p A$ também é linear e portanto é uma transformação linear.

Considerando agora B uma transformação linear que leva o espaço vetorial V para M, temos que AB leva V para N. E então, dado $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p$, com $v_i \in V$, a p-ésima potência exterior de AB fica

$$\left(\bigwedge^p AB\right)(v) = ABv_1 \wedge ABv_2 \wedge \ldots \wedge ABv_p$$
$$\left(\bigwedge^p AB\right)(v) = \left(\bigwedge^p A\right)(Bv_1 \wedge Bv_2 \wedge \ldots \wedge Bv_p)$$
$$\left(\bigwedge^p AB\right)(v) = \left(\bigwedge^p A\right)\left(\bigwedge^p B\right)(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p)$$
$$\left(\bigwedge^p AB\right)(v) = \left(\bigwedge^p A\right)\left(\bigwedge^p B\right)(v)$$

Como isso é válido para todo $v \in \bigwedge^p V$, segue que as duas transformações a seguir são equivalentes:

$$\left(\bigwedge^p AB\right) = \left(\bigwedge^p A\right)\left(\bigwedge^p B\right)$$

Dados $u = u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$ e $w = w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_q$, com $u \in \bigwedge^p M$ e $w \in \bigwedge^q M$, temos que $u \wedge w \in \bigwedge^{p+q} M$ e portanto podemos definir uma transformação linear $\bigwedge^{p+q} A$ usando $A : M \mapsto N$ pela expressão

$$\left(\bigwedge^{p+q} A\right)(u \wedge w) = Au_1 \wedge Au_2 \wedge \ldots \wedge Au_p \wedge Aw_1 \wedge Aw_2 \wedge \ldots \wedge Aw_q$$

Como o produto exterior é associativo, podemos reescrever a expressão acima como

$$\left(\bigwedge^{p+q} A\right)(u \wedge w) = (Au_1 \wedge Au_2 \wedge \ldots \wedge Au_p) \wedge (Aw_1 \wedge Aw_2 \wedge \ldots \wedge Aw_q)$$

e portanto

$$\left(\bigwedge^{p+q} A\right)(u \wedge w) = \left[\left(\bigwedge^{p} A\right)(u)\right] \wedge \left[\left(\bigwedge^{q} A\right)(w)\right] \tag{32}$$

3 Derivada exterior

3.1 Espaço dual

Definição 3.1 (Espaço dual)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Definimos o espaço dual V^* como sendo o conjunto de todos os funcionais lineares $V \mapsto \mathbb{K}$. Se $\alpha, \beta \in V^*$, $u \in V$, $c \in \mathbb{K}$, a soma e multiplicação por escalar ficam definidos respectivamente por*

$$(\alpha + \beta)(u) = \alpha(u) + \beta(u)$$

$$(c\alpha)(u) = c(\alpha(u))$$

Pelo fato dos funcionais serem lineares e da definição de soma e multiplicação por escalar, V^* forma um espaço vetorial.

Sejam $\alpha^i \in V^*$ e $a_i \in \mathbb{K}$. Suponha que

$$\sum_{i=1}^{q} a_i \alpha^i = 0 \tag{33}$$

onde 0 é o elemento nulo de V^*, ou seja, é o funcional que leva qualquer elemento de V para o elemento nulo de $\mathbb{K}$. O teorema (2.5) garante que cada funcional pode ser escrito em termos de produtos internos (desde que V esteja munido de um). Suponha que

$$\alpha^i = \langle u_i, \quad \rangle \quad u_i \in V$$

Cada elemento u_i pode ser descrito em função de uma base $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de V:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} b_i^j x_j$$

de forma que

$$\alpha^i = \sum_{j=1}^{n} b_i^j \langle x_j, \quad \rangle$$

Logo

$$0 = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} a_i b_i^j \langle x_j, \quad \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{q} a_i b_i^j \right) x_j, \qquad \right\rangle$$

Isso significa que esse produto interno com qualquer elemento de V sempre será zero. Pelo axioma da não-degenerescência, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{q} a_i b_i^j \right) x_j = 0$$

Como ξ é uma base,

$$\sum_{i=1}^{q} a_i b_i^j = 0 \qquad \forall j$$

Essa é uma equação matricial do tipo

$$aB = 0$$

com b_i^j sendo o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz B e

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_q \end{bmatrix}$$

Essa equação matricial tem n equações e q incógnitas. Se $q > n$, obrigatoriamente teremos soluções não triviais $a \neq 0$. Se $q \leqslant n$, só teremos a solução trivial $a = 0$ se o determinante de B for diferente de zero (ou equivalentemente se os elementos u_i que definem os funcionais α^i forem linearmente independentes). Isso implica, da definição de independência linear, que a dimensão do espaço dual V' é igual à dimensão do espaço V, pois $q = n$ é o maior valor para o qual a equação (33) possa ser satisfeita apenas com a solução trivial $a_i = 0$ e consequentemente $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^q\}$ seja linearmente independente.

Nesse caso, satisfeita a equação (33) com $q = n$, o conjunto $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ forma uma base do espaço dual V^*.

Definição 3.2 (Base dual)**.** *Sejam* $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *e* $\Gamma = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ *bases de* V *e* V^* *respectivamente. Denominamos* Γ *de base dual de* ξ *se*

$$\alpha^i(x_j) = \delta^i_j \quad \forall i, j$$

Teorema 3.1. *Toda base de um espaço vetorial* V *munido de produto interno possui uma base dual em* V^* *e é única.*

Demonstração. Suponha $\xi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base ortonormal de V. Se definirmos os funcionais

$$\alpha^i = \langle x_i, \quad \rangle$$

segue imediatamente que $\alpha^i(x_j) = \delta^i_j$ e portanto $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ forma uma base dual de ξ. Se $\{\alpha^1_0, \ldots, \alpha^n_0\}$ também for uma base dual de ξ, então

$$(\alpha^i - \alpha^i_0)(x_j) = \alpha^i(x_j) - \alpha^i_0(x_j) = \delta^i_j - \delta^i_j = 0 \tag{34}$$

para qualquer j. Segue disso que o funcional $(\alpha^i - \alpha^i_0)$ leva qualquer elemento de V a 0. Logo $(\alpha^i - \alpha^i_0)$ é o elemento nulo de V^* e

$$\alpha^i = \alpha^i_0$$

Como a equação (34) também é válida para qualquer i, segue que a base dual é única. ■

3.2 Espaço cotangente

Seja M um espaço topológico (como uma superfície ou um volume) de dimensão m. Definiremos um mapa de coordenadas $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}^n$ com U sendo um subconjunto aberto de M e φ uma função bijetora, contínua e com inversa

$\varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto U$ contínua. Cada ponto p que pertence a U pode ser levado univocamente a um vetor do espaço $\mathbb{R}^n$ pelo mapa φ e vice-versa.

Fixemos p um ponto em $U \subseteq M$. Sejam também $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ duas curvas em U definidas em um domínio $[-1, 1]$ tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Definiremos γ_1 e γ_2 como sendo curvas equivalentes se $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$, ou seja,

$$\left(\frac{d}{dt}\varphi(\gamma_1(t))\right)\Bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\varphi(\gamma_2(t))\right)\Bigg|_{t=0} \in \mathbb{R}^n \tag{35}$$

Em outras palavras, γ_1 e γ_2 são equivalentes se o vetor tangente a M no ponto p pela curva γ_1 for igual ao de γ_2 no mesmo ponto p. Definiremos $[\gamma]$ como sendo o conjunto de todas as curvas equivalentes a γ, também chamado de classe. Segue disso que $[\gamma]$ está associado a um vetor $(\varphi \circ \gamma)'(t = 0)$ que denominaremos de vetor tangente de M em p. Cada classe $[\gamma]$ fornece um vetor tangente distinto e a totalidade desses vetores formam um espaço vetorial T_pM que denominaremos de espaço tangente.

Exemplo 3.1. *Seja M uma esfera de raio r centrado na origem e $U \subseteq M$ a superfície dessa esfera excluindo os polos norte e sul. Em coordenadas esféricas, o mapa $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}^3$ é dado por*

$$\vec{\varphi}(\theta, \phi) = r\cos(\phi)\sin(\theta)\hat{\mathbf{i}} + r\sin(\phi)\sin(\theta)\hat{\mathbf{j}} + r\cos(\theta)\hat{\mathbf{k}}$$

Agora considere o ponto p de U em $\left(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0\right)$ e duas curvas γ_1 e γ_2 que passem pelo ponto p em $t = 0$:

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{\pi}{2} + t, 0\right)$$
$$\gamma_2(t) = \left(\frac{\pi}{2}, t\right)$$

Aplicando o mapa φ nessas curvas obteremos

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}(\gamma_1(t)) &= r\cos(0)\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\hat{\mathbf{i}} + r\sin(0)\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\hat{\mathbf{j}} + r\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\hat{\mathbf{k}} \\ &= r\cos(t)\hat{\mathbf{i}} - r\sin(t)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}(\gamma_2(t)) &= r\cos(t)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{i}} + r\sin(t)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{j}} + r\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{k}} \\ &= r\cos(t)\hat{\mathbf{i}} + r\sin(t)\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

e então

$$\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(\gamma_1(t)) = -r\sin(t)\hat{\mathbf{i}} - r\cos(t)\hat{\mathbf{k}}$$
$$\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(\gamma_2(t)) = -r\sin(t)\hat{\mathbf{i}} + r\cos(t)\hat{\mathbf{j}}$$

Em $t = 0$, obtemos dois vetores tangentes distintos de U em p:

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = -r\hat{\mathbf{k}}$$
$$(\varphi \circ \gamma_2)'(0) = r\hat{\mathbf{j}}$$

que é o esperado, já que o plano tangente da esfera no ponto p (em que $\hat{\mathbf{i}}$ é normal à superfície) é justamente o plano yz. Portanto uma base ortogonal de T_pM é $\{r\hat{\mathbf{j}}, -r\hat{\mathbf{k}}\}$. Note também que

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = r\hat{\theta}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \qquad e \qquad (\varphi \circ \gamma_2)'(0) = r\hat{\phi}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

onde

$$\hat{\theta}(\theta, \phi) = (\cos(\theta)\cos(\phi))\hat{\mathbf{i}} + (\cos(\theta)\sin(\phi))\hat{\mathbf{j}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\phi}(\theta, \phi) = -\sin(\phi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\phi)\hat{\mathbf{j}}$$

Isso não é uma coincidência, conforme veremos a seguir.

Como estamos lidando com curvas equivalentes, iremos escolher a mais simples de $[\gamma_i]$. Dado um sistema de coordenadas ortogonal, iremos fazer

$$\gamma_i(t) = (p_1 + t\delta_{i1}, p_2 + t\delta_{i2}, \ldots, p_m + t\delta_{im})$$

no qual passa pelo ponto $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ quando $t = 0$. Esse foi o caso que usamos no exemplo (3.1), onde γ_1 e γ_2 estão relacionados a uma mudança na coordenada ϕ e θ respectivamente. Denotando $u_j = p_j + t\delta_{ij}$ como sendo a coordenada generalizada u_j parametrizada pela curva γ_i e x_k a coordenada cartesiana no $\mathbb{R}^n$, temos que

$$(\varphi \circ \gamma_i)(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(u_j(t))\hat{\mathbf{e_k}}$$

Derivando em relação a t e usando a regra da cadeia, obteremos

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \gamma_i)'(t) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}\frac{du_j}{dt}\hat{\mathbf{e_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}\delta_{ij}\hat{\mathbf{e_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial u_i}\hat{\mathbf{e_k}} \\ &= \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}\end{aligned}$$

Mas da definição de versores em coordenadas generalizadas temos

$$\hat{\mathbf{u_i}} = \frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i} \qquad \text{onde} \qquad \lambda_i = \left|\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}\right|$$

Portanto, em $t = 0$ ficamos com

$$(\varphi \circ \gamma_i)'(0) = \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p \vec{\varphi} = \lambda_i(p)\mathbf{\hat{u}_i}(p) \tag{36}$$

ou seja, os versores $\mathbf{\hat{u}_i}$ no ponto p são os vetores tangentes $(\varphi \circ \gamma_i)'(0)$ normalizados. No caso do exemplo (3.1), fazendo $\mathbf{\hat{u}_1} = \hat{\theta}$ e $\mathbf{\hat{u}_2} = \hat{\phi}$, temos $\lambda_1 = \lambda_2 = r$.

Agora seja $f : M \mapsto \mathbb{R}$ uma função infinitamente diferenciável, ou seja, $f \in C^\infty(M)$ (pequenos deslocamentos em M causa pequenas variações na imagem em $\mathbb{R}$). A função f parametrizada pela curva γ_i é dada por

$$(f \circ \gamma_i)(t) = f(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$$

Derivando em relação a t e usando a regra da cadeia,

$$(f \circ \gamma_i)'(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\frac{du_j}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u_i}$$

Agora vamos definir uma função $\Phi_f : T_pM \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_f([\gamma_i]) = (f \circ \gamma_i)'(0)$$

Isso significa que

$$\Phi_f([\gamma_i]) = \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p f \tag{37}$$

ou seja, $\Phi_f([\gamma_i])$ nos diz a variação da função f em p na direção relacionada à coordenada u_i.

Agora note das equações (36) e (37) que para cada curva γ_i parametrizada numa direção específica $\mathbf{\hat{u}_i}$ no ponto p temos a aplicação de uma derivada parcial $\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p$. Nesse sentido, podemos denotar o vetor tangente como

$$(\varphi \circ \gamma_i)'(0) = \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p$$

deixando implícito que esse elemento está definido em um mapa φ sob uma parametrização $[\gamma_i]$ na coordenada u_i.

Como presumimos que as coordenadas u_i são ortogonais, então os versores $\mathbf{\hat{u}_i}$ o são e consequentemente, da equação (36), assim também são os vetores tangentes $(\varphi \circ \gamma_i)'(0)$. Garantida a independência linear desses vetores, podemos formar uma base do espaço tangente T_pM escrito na forma $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_p \right\}$.

Por outro lado, sabemos que $\Phi([\gamma_i])$ é um funcional linear, uma vez que a sua imagem é o corpo dos reais e

$$\Phi_{af+bg}([\gamma_i]) = \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_p (af + bg) = a\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_p f + b\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_p g = a\Phi_f([\gamma_i]) + b\Phi_g([\gamma_i])$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Logo os elementos Φ_f satisfazem os requisitos da definição (3.1) e portanto formam um espaço dual de T_pM, que denominaremos de espaço cotangente, denotado por $T_p{}^*M$.

Os elementos de T_p^*M são denominados de vetores cotangentes (ou de covetores tangentes).

Além disso, também temos que

$$\Phi_{u^i}([\gamma_j]) = \Phi_{u^i}\left(\left.\frac{\partial}{\partial u^j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial u^j}\right|_p u^i = \delta^i_j \tag{38}$$

Segue disso que $\{\Phi_{u^1}, \Phi_{u^2}, \ldots, \Phi_{u^m}\}$ é a base dual de $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial u^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_p\right\}$. Mais ainda, verificamos que Φ_f satisfaz a regra de Leibniz do produto de derivadas, pois

$$\Phi_{fg}([\gamma_i]) = \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_p (fg) = \left.\frac{\partial f}{\partial u^i}\right|_p g + \left.\frac{\partial g}{\partial u^i}\right|_p f$$
$$\Phi_{fg}([\gamma_i]) = \Phi_f([\gamma_i])g + \Phi_g([\gamma_i])f$$

Isso nos motiva a reescrever Φ_f como sendo $(\mathrm{d}f)_p$, denotando a diferencial de f no ponto p. Portanto $\{(\mathrm{d}u^1)_p, (\mathrm{d}u^2)_p, \ldots, (\mathrm{d}u^m)_p\}$ é a base dual de $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial u^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_p\right\}$.

Como tudo isso é válido para qualquer ponto p em U, iremos omitir p nas notações dos vetores tangentes e cotangentes.

3.3 Álgebra de p-formas

Definição 3.3 (P-forma). *Dado o espaço vetorial cotangente T^*M, definiremos os elementos do espaço $\bigwedge^p(T^*M)$ de p-formas. O espaço das 0-formas $\bigwedge^0(T^*M)$ será o corpo $C^\infty(M)$.*

As p-formas aparecem nas integrais, com a 1-forma aparecendo em integrais de linha, 2-formas em integrais de superfície e 3-formas em integrais volumétricas:

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad \oiint_\Sigma \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \qquad \iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Porém essa relação será vista mais adiante.

Sendo $\xi = \{\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^n\}$ uma base de $\bigwedge^1(T^*M)$, então $\mathrm{d}f$, com $f \in C^\infty(M)$, pode ser escrito como uma combinação linear desses elementos:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n a_i\,\mathrm{d}x^i$$

Lembrando que as 1-formas $\mathrm{d}x^i$ são funcionais lineares, podemos aplicá-los a um vetor tangente $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$:

$$(\mathrm{d}f)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathrm{d}x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

Mas como $\{\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^n\}$ é a base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ (equação 38), temos

$$(\mathrm{d}f)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta^i_j = a_j$$

Mas da equação (37) sabemos que

$$(\mathrm{d}f)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Phi_f([\gamma_j]) = \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

no que implica $a_j = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}$. Portanto ficamos com

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \tag{39}$$

que é a regra da cadeia para as diferenciais.

Atentando à equação (39) podemos observar uma transformação $d : C^\infty \mapsto T^*M$ tal que

$$d = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \tag{40}$$

ou equivalentemente $d : \bigwedge^0(T^*M) \mapsto \bigwedge^1(T^*M)$. Iremos generalizar essa ideia para uma transformação linear d que leva uma p-forma em uma $(p+1)$-forma,

$$d : \quad \bigwedge^{p}(T^*M) \longmapsto \bigwedge^{p+1}(T^*M)$$

que satisfaz quatro axiomas:

Axioma 6 (Linearidade)**.** $\forall u, v \in \bigwedge^p(T^*M), \quad d(u+v) = du + dv$

$$\mathrm{d}(au) = a\,\mathrm{d}u \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Axioma 7 (Distribuição)**.** $\forall u \in \bigwedge^p(T^*M), \quad \forall v \in \bigwedge^q(T^*M)$

$$d(u \wedge v) = (du \wedge v) + (-1)^p(u \wedge dv)$$

Axioma 8 (Lema de Poincaré)**.** $\forall u \in \bigwedge^p(T^*M), \quad d(du) = 0$

Axioma 9 (Regra da cadeia)**.** $\forall f \in C^\infty(M), \quad df = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$

Denominamos d de derivada exterior.

O axioma 6 generaliza a linearidade para p-formas além das 0-formas enquanto que o axioma 9 foi herdado da equação (40).

No axioma 7, colocamos um fator $(-1)^p$ no segundo termo para evitar inconsistências com o axioma 6. Para verificarmos isso, suponha $u \in \bigwedge^p(T^*M)$, $v \in \bigwedge^q(T^*M)$ e que o axioma seja modificado de forma que

$$d(u \wedge v) = \mathrm{d}u \wedge v + a(u \wedge dv) \tag{41}$$

onde a é um escalar indeterminado. Trocando u e v de lugar, ganhamos um fator $(-1)^{pq}$, e então

$$\begin{aligned}d(u \wedge v) &= d((-1)^{pq}(v \wedge u)) = (-1)^{pq} d(v \wedge u) \\ &= (-1)^{pq}(\mathrm{d}v \wedge u + b(v \wedge \mathrm{d}u)) = (-1)^{pq}(\mathrm{d}v \wedge u) + (-1)^{pq} b(v \wedge \mathrm{d}u)\end{aligned}$$

onde b também é um escalar indeterminado. Sabendo que $\mathrm{d}u$ é uma $(p+1)$-forma e que $\mathrm{d}v$ é uma $(q+1)$-forma, então

$$\mathrm{d}v \wedge u = (-1)^{p(q+1)}(u \wedge \mathrm{d}v) = (-1)^{pq+p}(u \wedge \mathrm{d}v)$$

$$v \wedge \mathrm{d}u = (-1)^{(p+1)q}(\mathrm{d}u \wedge v) = (-1)^{pq+q}(\mathrm{d}u \wedge v)$$

e então

$$\begin{aligned}d(u \wedge v) &= (-1)^{pq}(-1)^{pq+p}(u \wedge \mathrm{d}v) + (-1)^{pq} b(-1)^{pq+q}(\mathrm{d}u \wedge v) \\ &= (-1)^{p}(u \wedge \mathrm{d}v) + b(-1)^{q}(\mathrm{d}u \wedge v)\end{aligned}$$

Igualando essa expressão à equação (41), obtemos

$$\mathrm{d}u \wedge v + a(u \wedge dv) = (-1)^{p}(u \wedge \mathrm{d}v) + b(-1)^{q}(\mathrm{d}u \wedge v)$$

$$\left[1 - b(-1)^{q}\right](\mathrm{d}u \wedge v) + \left[a - (-1)^{p}\right](u \wedge dv) = 0$$

Essa equação é válida para qualquer p-vetor u e q-vetor v, incluindo os casos em que $\mathrm{d}u \wedge v$ é linearmente independente de $u \wedge dv$. Isso implica que

$$1 - b(-1)^{q} = 0 \qquad \text{e} \qquad a - (-1)^{p} = 0$$

Consequentemente a e b não podem ser quaisquer valores, eles são $b = (-1)^{q}$ e $a = (-1)^{p}$, que é exatamente o axioma 7.

Um exemplo em que $(-1)^{p} = -1$ no axioma 7 é o divergente do produto vetorial (item 4 do teorema 1.8), dado por

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G})$$

conforme será mostrado mais adiante (exemplo 3.5).

Considerando $x^{i} \in C^{\infty}(M)$, o axioma 8 implica que

$$\mathrm{d}(x^{1} \wedge \mathrm{d}x^{2} \wedge \mathrm{d}x^{3} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p}) = \mathrm{d}(x^{1} \wedge (\mathrm{d}x^{2} \wedge \mathrm{d}x^{3} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p}))$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(x^{1} \wedge \mathrm{d}x^{2} \wedge \mathrm{d}x^{3} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p}) = \\ &\qquad \mathrm{d}x^{1} \wedge (\mathrm{d}x^{2} \wedge \mathrm{d}x^{3} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p}) + (-1)^{0}\, \mathrm{d}(\mathrm{d}x^{2} \wedge \mathrm{d}x^{3} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p})\end{aligned}$$

O último termo se anula para qualquer distribuição que fizermos e então

$$\mathrm{d}(x^{1} \wedge \mathrm{d}x^{2} \wedge \mathrm{d}x^{3} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p}) = \mathrm{d}x^{1} \wedge \mathrm{d}x^{2} \wedge \mathrm{d}x^{3} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p} \qquad (42)$$

Segue disso que

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}(x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^p)) = 0$$

O axioma 8 tem como consequência as propriedades

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = 0$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = \mathbf{0}$$

devido a aplicações sucessivas da derivada exterior, conforme veremos na seção 3.5.

Teorema 3.2 (Existência e unicidade da derivada exterior)**.** *Existe apenas uma única transformação d que satisfaz simultaneamente os axiomas 6, 7, 8 e 9.*

Demonstração. Suponha inicialmente a existência de uma transformação d que satisfaça os quatro axiomas e seja ω uma p-forma dada por

$$\omega = \sum_H a_H \, \mathrm{d}x^H$$

com $\mathrm{d}x^H = \mathrm{d}x^{h_1} \wedge \mathrm{d}x^{h_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{h_p}$ e $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_p\}$ combinações de p índices. Iremos compactar os quatro axiomas numa só expressão aplicando todos eles em ω:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\left(\sum_H a_H \, \mathrm{d}x^H\right) \\
\mathrm{d}\omega &= \sum_H \mathrm{d}\left(a_H \, \mathrm{d}x^H\right) \quad \text{(Axioma 6)} \\
\mathrm{d}\omega &= \sum_H \mathrm{d}a_H \wedge \mathrm{d}x^H \quad \text{(Axioma 7 e 8)} \\
\mathrm{d}\omega &= \sum_H \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_H}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H \quad \text{(Axioma 9)}
\end{aligned}$$

Essa transformação d então determina uma única $(p+1)$-forma para cada p-forma ω. Então se d existir, ele será único. Para provar sua existência, suponha agora que d é uma nova transformação definida estritamente pela expressão

$$\omega = \sum_H a_H \, \mathrm{d}x^H \implies \mathrm{d}\omega = \sum_H \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_H}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H \tag{43}$$

Então dados $\lambda = \sum_H b_H \,\mathrm{d}x^H$ uma p-forma e $p, q \in \mathbb{R}$, temos

$$\mathrm{d}(p\omega + q\lambda) = \mathrm{d}\left(\sum_H pa_H \,\mathrm{d}x^H + qb_H \,\mathrm{d}x^H\right) = \mathrm{d}\left(\sum_H (pa_H + qb_H)\,\mathrm{d}x^H\right)$$

$$\mathrm{d}(\omega + \lambda) = \sum_H \sum_{i=1}^n \frac{\partial(pa_H + qb_H)}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H$$

$$\mathrm{d}(\omega + \lambda) = \sum_H \sum_{i=1}^n p\frac{\partial a_H}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H + \sum_H \sum_{i=1}^n q\frac{\partial b_H}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H$$

$$\mathrm{d}(\omega + \lambda) = p\,\mathrm{d}\omega + q\,\mathrm{d}\lambda$$

o que mostra que d satisfaz o axioma 6. Além disso, agora considerando que λ seja uma q-forma, temos

$$\omega \wedge \lambda = \left(\sum_H a_H \,\mathrm{d}x^H\right) \wedge \left(\sum_K b_K \,\mathrm{d}x^K\right) = \sum_{H,K} a_H b_K \,\mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}x^K$$

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \lambda) = \sum_{H,K} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}(a_H b_K)\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}x^K$$

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \lambda) = \sum_{H,K} \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_H}{\partial x^i} b_K \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}x^K + \sum_{H,K} \sum_{i=1}^n a_H \frac{\partial b_K}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}x^K$$

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \lambda) = \left(\sum_H \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_H}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H\right) \wedge \left(\sum_K b_K \,\mathrm{d}x^K\right) + \sum_{H,K} \sum_{i=1}^n (-1)^{1\cdot p} a_H \frac{\partial b_K}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^K$$

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \lambda) = \mathrm{d}\omega \wedge \lambda + (-1)^p \left(\sum_H a_H \,\mathrm{d}x^H\right) \wedge \left(\sum_K \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_K}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^K\right)$$

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \lambda) = \mathrm{d}\omega \wedge \lambda + (-1)^p(\omega \wedge \mathrm{d}\lambda)$$

e portanto d também satisfaz o axioma 7.

Aplicando d duas vezes em ω, temos

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\left(\sum_H \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_H}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H\right)$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \sum_H \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 a_H}{\partial x^j \partial x^i}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H$$

Os índices são mudos, então trocando i por j, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \sum_H \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_H}{\partial x^i \partial x^j} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^H \\
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= (-1)^{1\cdot 1} \sum_H \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_H}{\partial x^i \partial x^j} \,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H
\end{aligned}$$

Mas como $a_H \in C^\infty(M)$, as derivadas parciais comutam e portanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= -\sum_H \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_H}{\partial x^j \partial x^i} \,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H \\
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= -\,\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)
\end{aligned}$$

O único elemento de um espaço vetorial que é simétrico dele próprio é o elemento nulo e consequentemente

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$$

Logo d satisfaz o axioma 8. E finalmente, o axioma 9 é satisfeito de imediato. Isso prova a existência de uma transformação d que satisfaz os quatro axiomas. Usando a primeira parte da demonstração, concluímos que a derivada exterior d é única. ■

Exemplo 3.2 (Gradiente)**.** *Ao aplicar a derivada exterior a uma 0-forma f infinitamente diferenciável no espaço $\mathbb{R}^3$, obtemos*

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

As coordenadas de $\mathrm{d}f$ na base $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$ são justamente as coordenadas do gradiente de f em coordenadas cartesianas.

Agora definamos uma transformação linear $\Gamma : \bigwedge^1(T^*\mathbb{R}^3) \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$\Gamma(\mathrm{d}x) = \hat{\mathbf{i}} \quad e \quad \Gamma(\mathrm{d}y) = \hat{\mathbf{j}} \quad e \quad \Gamma(\mathrm{d}z) = \hat{\mathbf{k}}$$

Note que essa transformação leva uma base de $\bigwedge^1(T^*\mathbb{R}^3)$ a uma base de $\mathbb{R}^3$ e ambos os espaços vetoriais possuem a mesma dimensão, o que implica que Γ é bijetora e então existe $\Gamma^{-1} : \mathbb{R}^3 \mapsto \bigwedge^1(T^*\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\Gamma^{-1}\hat{\mathbf{i}} = \mathrm{d}x \quad e \quad \Gamma^{-1}\hat{\mathbf{j}} = \mathrm{d}y \quad e \quad \Gamma^{-1}\hat{\mathbf{k}} = \mathrm{d}z$$

Usando essa transformação em $\mathrm{d}f$, obtemos

$$\Gamma(\mathrm{d}f) = \boldsymbol{\nabla} f$$

Exemplo 3.3 (Rotacional)**.** *Aplicando d em uma 1-forma ω dada por*

$$\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

com $P, Q, R \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, *obteremos*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\,(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z)\\
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(P\,\mathrm{d}x) + \mathrm{d}(Q\,\mathrm{d}y) + \mathrm{d}(R\,\mathrm{d}z)\\
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x +&\\
\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y +&\\
\left(\frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z&
\end{aligned}$$

Os termos com $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y$ *e* $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z$ *são zero e portanto*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega = \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y +&\\
\frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z&
\end{aligned}$$

Uma vez que definimos $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ *como uma base de orientação positiva (sistema dextrogiro) de* $\bigwedge^3(T^*\mathbb{R}^3)$, *então iremos colocar em evidência as 2-formas com orientação positiva:*

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Identificamos que as coordenadas de $\mathrm{d}\omega$ *na base* $\{\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\}$ *são justamente as do rotacional em coordenadas cartesianas de um campo vetorial*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = P(x,y,z)\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\hat{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$$

Como $*(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ *e idem para* $\mathrm{d}y$ *e* $\mathrm{d}z$, *temos que*

$$*(\mathrm{d}\omega) = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})_x\,\mathrm{d}x + (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})_y\,\mathrm{d}y + (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})_z\,\mathrm{d}z$$

Usando a transformação linear Γ *do exemplo* (3.2), *podemos escrever* ω *como*

$$\omega = \Gamma^{-1}(\mathbf{F})$$

e também

$$\Gamma(*(\mathrm{d}\omega)) = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})_x\hat{\mathbf{i}} + (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})_y\hat{\mathbf{j}} + (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})_z\hat{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$$

Finalmente temos que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \Gamma\big[\,*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))\big]$$

Exemplo 3.4 (Divergente e Laplaciano). *Dado uma 2-forma* ω

$$\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

com $P, Q, R \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, *temos que*

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\left(P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\right) + \mathrm{d}\left(Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x\right) + \mathrm{d}\left(R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\right)$$
$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega = &\left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \\ &\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \\ &\left(\frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Excluindo os termos com diferenciais repetidos e sabendo que

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

concluímos que

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

A coordenada de $\mathrm{d}\omega$ *na base* $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$ *é justamente o divergente em coordenadas cartesianas de um campo vetorial*

$$\mathbf{F} = P(x,y,z)\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\hat{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$$

Usando a mesma transformação linear Γ *dos exemplos passados, devemos notar que*

$$\omega = *\lambda$$

com

$$\lambda = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \Gamma^{-1}(\mathbf{F})$$

e também notando que

$$*(\mathrm{d}\omega) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$$

segue que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = *\,\mathrm{d}(*\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))$$

Já para o laplaciano, que é o divergente do gradiente, temos que se f *é uma função real escalar, então*

$$\nabla^2 f = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{\nabla} \cdot \Gamma(\mathrm{d}f) = *\,\mathrm{d}(*\Gamma^{-1}(\Gamma(\mathrm{d}f)))$$

$$\nabla^2 f = *\,\mathrm{d}(*\,\mathrm{d}f)$$

Resumindo, temos que se f é uma função real escalar e $\mathbf{F}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, então podemos definir o gradiente, divergente, rotacional e laplaciano em coordenadas cartesianas pelas equações

$$\boldsymbol{\nabla} f = \Gamma(\mathrm{d}f) \tag{44}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = *\,\mathrm{d}(*\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \Gamma\big[\, *\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))\big] \tag{46}$$

$$\nabla^2 f = *\,\mathrm{d}(*\,\mathrm{d}f) \tag{47}$$

Exemplo 3.5. *Se λ e ω forem uma 1-forma e 2-forma respectivamente de um espaço T_p^*M de dimensão 3, então vimos anteriormente que calcular $\mathrm{d}\lambda$ é equivalente a calcular o rotacional do campo vetorial associado a λ e e $\mathrm{d}\omega$ corresponde ao divergente do campo associado a ω. Também vimos no exemplo (2.1) que o produto vetorial de dois campos está associado ao produto exterior entre eles (produto exterior entre dois 1-vetores). Então seja γ uma 1-forma e*

$$\omega = \lambda \wedge \gamma$$

Segue do axioma (7) da distribuição que

$$\mathrm{d}\omega = (\mathrm{d}\lambda \wedge \gamma) - (\lambda \wedge \mathrm{d}\gamma)$$

Associando λ com $\mathbf{F}$ e γ com $\mathbf{G}$, então ω está associado a $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, $\mathrm{d}\lambda$ a $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ e $\mathrm{d}\gamma$ a $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G}$.

Mas também vimos no exemplo (2.2) que o produto escalar está associado ao produto exterior de um 2-vetor com um 1-vetor. Isso significa que $\mathrm{d}\lambda \wedge \gamma$ está associado a $(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G}$ enquanto que $\lambda \wedge \mathrm{d}\gamma$ está associado a $(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$. E daí surge a propriedade

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G})$$

3.4 Mapeamento e mudança de coordenadas

Sejam U e V subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Um mapa ϕ_0 relaciona coordenadas em U para coordenadas em V,

$$\phi_0 : U \mapsto V \qquad \phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^m) \tag{48}$$

com $y^i \in C^\infty U$ para cada coordenada. Dado também $f : V \mapsto \mathbb{R}$ uma função infinitamente diferenciável, podemos compor ϕ_0 e f em uma única função $\phi_0^* f : U \mapsto \mathbb{R}$

$$\phi_0^* f = f \circ \phi_0$$

de forma que $\phi_0^* f$ agora tem domínio em U e leva para $\mathbb{R}$. Ou equivalentemente ϕ_0^* leva uma função de domínio V para uma função com domínio em

U. Conforme vimos na seção (3.3), a função escalar f configura como uma 0-forma pertencente a $\bigwedge^0(T^*V)$ enquanto que $\phi_0^* f$ é uma 0-forma pertencente a $\bigwedge^0(T^*U)$. Então podemos afirmar que

$$\phi_0^* : \bigwedge^0(T^*V) \mapsto \bigwedge^0(T^*U)$$

Analogamente, podemos definir uma outra função ϕ_1^* que leva uma 1-forma em V para uma 1-forma em U apenas realizando a substituição (48) e usando a regra da cadeia (axioma 9):

$$\phi_1^* \, \mathrm{d}y^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \, \mathrm{d}x^j \tag{49}$$

Podemos ver que ϕ_1^* é linear, pois $\mathrm{d}y^1 + \mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}(y^1 + y^2)$ e as derivadas parciais são lineares. Então podemos afirmar que ϕ_1^* configura como uma transformação linear.

Para uma 1-forma qualquer ω em V,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(y^1, \ldots, y^n) \, \mathrm{d}y^i = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}y^i$$

podemos aplicar a equação (49) para obter

$$\phi_1^* \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i(\mathbf{y}(\mathbf{x})) \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \, \mathrm{d}x^j$$

Essa é a aplicação do mapeamento para 1-formas. Para generalizarmos ϕ^* para p-formas, usaremos a propriedade (32) das transformações lineares,

$$\left(\bigwedge^{p+q} A \right) (u \wedge w) = \left[\left(\bigwedge^{p} A \right) (u) \right] \wedge \left[\left(\bigwedge^{q} A \right) (w) \right] \tag{50}$$

Por exemplo, para o caso das 2-formas fazemos $p = q = 1$ na expressão acima e teremos

$$\begin{aligned}
\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) &= \phi_1^*(\mathrm{d}y^1) \wedge \phi_1^*(\mathrm{d}y^2) \\
\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y^1}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^2}{\partial x^j} \, \mathrm{d}x^j \right) \\
\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial y^1}{\partial x^i} \frac{\partial y^2}{\partial x^j} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j
\end{aligned} \tag{51}$$

Como i e j são índices mudos, podemos trocá-los de lugar:

$$\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial y^1}{\partial x^j} \frac{\partial y^2}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = - \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial y^1}{\partial x^j} \frac{\partial y^2}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \tag{52}$$

Somando $\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2)$ com ele próprio com as representações (51) e (52) obtemos

$$\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) + \phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j - \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial y^1}{\partial x^j}\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

$$2\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j} - \frac{\partial y^1}{\partial x^j}\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

e por fim

$$\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial y^2}{\partial x^j} - \frac{\partial y^1}{\partial x^j}\frac{\partial y^2}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

O termo entre parênteses é justamente o jacobiano de y^1 e y^2 em relação a x^i e x^j, dado pela equação (12). Logo podemos reescrever a expressão anterior para obtermos

$$\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial(y^1, y^2)}{\partial(x^i, x^j)}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \tag{53}$$

Teorema 3.3. *Dados $\phi_p^* : \bigwedge^p(T^*V) \mapsto \bigwedge^p(T^*U)$, ω e γ p-formas e λ uma q-forma, então*

1. $\phi_p^*(\omega + \gamma) = \phi_p^*(\omega) + \phi_p^*(\gamma)$
2. $\phi_{p+q}^*(\omega \wedge \lambda) = \phi_p^*(\omega) \wedge \phi_q^*(\lambda)$
3. $\mathrm{d}(\phi_p^*\omega) = \phi_{p+1}^*(\mathrm{d}\omega)$
4. *Se $\phi : U \mapsto V$ e $\psi : V \mapsto W$, então $(\psi \circ \phi)_p^* = \phi_p^* \circ \psi_p^*$*

Demonstração. O item 1 para $p = 0$ é trivial. Sabemos que ϕ_1^* é linear. Para verificarmos se ϕ_2^* é linear,

$$\begin{aligned}
\phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^3) &= \phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge (\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}y^3)) \\
&= \phi_1^*(\mathrm{d}y^1) \wedge \phi_1^*(\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}y^3) \\
&= \phi_1^*(\mathrm{d}y^1) \wedge (\phi_1^*(\mathrm{d}y^2) + \phi_1^*(\mathrm{d}y^3) \\
&= \phi_1^*(\mathrm{d}y^1) \wedge \phi_1^*(\mathrm{d}y^2) + \phi_1^*(\mathrm{d}y^1) \wedge \phi_1^*(\mathrm{d}y^3) \\
&= \phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2) + \phi_2^*(\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^3)
\end{aligned}$$

e portanto ϕ_2^* também é linear. Suponha que ϕ_p^* é linear para um certo p e que ω seja uma p-forma, então

$$\phi_{p+1}^*(\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1}) = \phi_p^*(\omega) \wedge \phi_1^*(\mathrm{d}y^{p+1})$$

Podemos escrever ω como a soma de duas p-formas. Devido à linearidade do produto exterior e de ϕ_1^*, segue que ϕ_{p+1}^* também é linear e portanto provamos por indução o item 1.

O item 2 advém diretamente da propriedade das transformações lineares (50), conforme visto anteriormente.

Para o terceiro item, vemos que se f é uma 0-forma então

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial y^i} \mathrm{d}y^i$$

Aplicando ϕ_1^* e usando sua linearidade, obtemos

$$\phi_1^*(\mathrm{d}f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \mathrm{d}x^j$$

Mas da regra da cadeia temos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \frac{\partial f(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^j} = \frac{\partial(\phi_0^*(f))}{\partial x^j}$$

Logo

$$\phi_1^*(\mathrm{d}f) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(\phi_0^*(f))}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j = \mathrm{d}(\phi_0^*(f))$$

Pela linearidade, essa propriedade é válida para quaisquer 0-formas f e portanto o par de funções ϕ_0^* e ϕ_1^* satisfaz o item 3. Agora suponha que essa propriedade seja válida para algum p. Usando o item 2, temos

$$\phi_{p+1}^*(\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1}) = \phi_p^*(\omega) \wedge \phi_1^*(\mathrm{d}y^{p+1})$$

Aplicando a derivada exterior em ambos os lados, obteremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\phi_{p+1}^*(\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1})) &= \mathrm{d}(\phi_p^*(\omega) \wedge \phi_1^*(\mathrm{d}y^{p+1})) \\
\mathrm{d}(\phi_{p+1}^*(\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1})) &= \mathrm{d}(\phi_p^*(\omega)) \wedge \phi_1^*(\mathrm{d}y^{p+1}) + (-1)^p(\phi_p^*(\omega) \wedge \mathrm{d}(\phi_1^*(\mathrm{d}y^{p+1})))
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\mathrm{d}(\phi_1^*(\mathrm{d}y^{p+1})) = \phi_2^*(\mathrm{d}(\mathrm{d}y^{p+1})) = \phi_2^*(0) = 0$$

e por hipótese

$$\mathrm{d}(\phi_p^*(\omega)) = \phi_{p+1}^*(\mathrm{d}\omega)$$

então

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\phi_{p+1}^*(\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1})) &= \phi_{p+1}^*(\mathrm{d}\omega) \wedge \phi_1^*(\mathrm{d}y^{p+1}) \\
\mathrm{d}(\phi_{p+1}^*(\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1})) &= \phi_{p+2}^*(\mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1})
\end{aligned}$$

Mas também

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1}) = \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1} + (-1)^p(\omega \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}y^{p+1})) = \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1}$$

e portanto

$$\mathrm{d}(\phi_{p+1}^*(\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1})) = \phi_{p+2}^*(\mathrm{d}(\omega \wedge \mathrm{d}y^{p+1}))$$

o que prova por indução o item 3 de ϕ_p^* para qualquer p.

Dada uma 0-forma g que possui domínio em W, $\psi_0^* g$ é uma 0-forma que possui domínio em V. Por sua vez, $\phi_0^*(\psi_0^* g)$ é uma 0-forma com domínio em U. Então

$$[(\psi \circ \phi)_0^* g]\,(\mathbf{x}) = g(\psi(\phi(\mathbf{x}))) = [\psi_0^* g]\,(\phi(\mathbf{x})) = \phi_0^* \big[\,[\psi_0^* g]\,(\mathbf{x})\big] = [(\phi_0^* \circ \psi_0^*) g]\,(\mathbf{x})$$

Para $p = 1$, verificamos que se $\mathbf{z}$ denota as coordenadas em W, então

$$(\phi_1^* \circ \psi_1^*)\,\mathrm{d}z = \phi_1^*\,[\psi_1^*\,\mathrm{d}z] = \phi_1^* \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z(\mathbf{y})}{\partial y^i}\,\mathrm{d}y^i\right]$$

$$(\phi_1^* \circ \psi_1^*)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial z(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right) \phi_1^*(\mathrm{d}y^i)$$

$$(\phi_1^* \circ \psi_1^*)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k$$

Retraindo a soma com o índice i com a regra da cadeia, obtemos

$$(\phi_1^* \circ \psi_1^*)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k$$

$$(\phi_1^* \circ \psi_1^*)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^j}\delta_{jk}\,\mathrm{d}x^k$$

$$(\phi_1^* \circ \psi_1^*)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z(\mathbf{y}(\mathbf{x}))}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j$$

$$(\phi_1^* \circ \psi_1^*)\,\mathrm{d}z = (\psi \circ \phi)_1^*\,\mathrm{d}z$$

e portanto o item 4 é válido para $p = 1$.

Agora suponha que o item 4 seja válido para algum p e que ω seja uma p-forma em T^*W. Então

$$\begin{aligned}\big[(\psi \circ \phi)_{p+1}^*(\omega \wedge \mathrm{d}z^{p+1})\big]\,(\mathbf{x}) &= \big[(\psi \circ \phi)_p^*(\omega)\big]\,(\mathbf{x}) \wedge \big[(\psi \circ \phi)_1^*(\mathrm{d}z^{p+1})\big]\,(\mathbf{x}) \\ &= \big[(\phi_p^* \circ \psi_p^*)(\omega)\big]\,(\mathbf{x}) \wedge \big[(\phi_1^* \circ \psi_1^*)(\mathrm{d}z^{p+1})\big]\,(\mathbf{x}) \\ &= \big[(\phi_{p+1}^* \circ \psi_{p+1}^*)^*(\omega \wedge \mathrm{d}z^{p+1})\big]\,(\mathbf{x})\end{aligned}$$

o que completa por indução a demonstração. ∎

O item 4 do teorema (3.3) diz que mapear de W diretamente para U é equivalente a mapear de W para V e depois de V para U.

Exemplo 3.6. *Sejam d e r constantes reais positivas e ϕ o mapeamento $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ dado por*

$$\begin{aligned}x &= d\cos(\varphi) + r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= d\sin(\varphi) + r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= r\sin(\theta)\end{aligned}$$
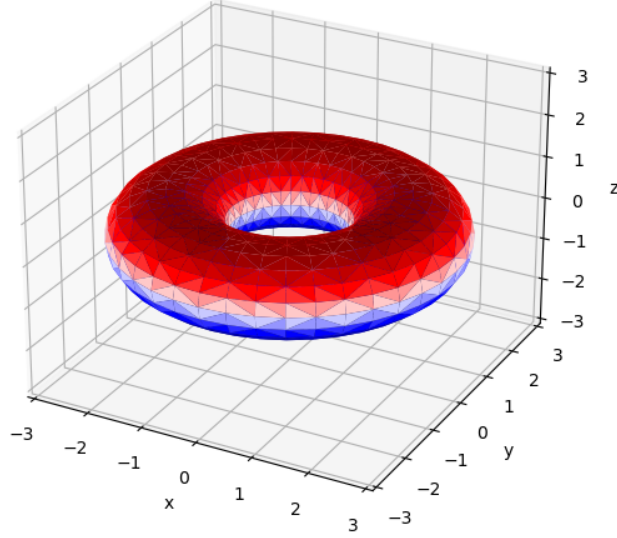
Figura 1: Toro com $d = 2$ e $r = 1$.

ou seja, $x = x(\theta, \varphi)$*,* $y = y(\theta, \varphi)$ *e* $z = z(\theta, \varphi)$*. Considerando* φ *o ângulo da projeção de um ponto* q *no plano* xy *em relação ao eixo* x *(ângulo azimutal) e* θ *o ângulo entre* q *e o plano* xy *(a latitude) no sentido de fora para dentro da superfície, então todos os valores possíveis de* φ *e* θ *formam uma superfície no* $\mathbb{R}^3$ *que é denominada de toro (figura 1). Podemos verificar isso de forma mais nítida se escrevermos*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d + r\cos(\theta) \\ 0 \\ r\sin(\theta) \end{bmatrix} \tag{54}$$

que é a matriz de rotação em torno do eixo z *aplicada a uma circunferência de raio* r *no plano* xz *cujo centro está no eixo* x *mas deslocado em* d*.*

Dada uma 1-forma $\omega = (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z$*, temos que*

$$\phi_1^*\omega = \left[\, [d + r\cos(\theta)]^2 \cos^2(\varphi)) + [d + r\cos(\theta)]^2 \sin^2(\varphi))\right] \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$\phi_1^*\omega = [d + r\cos(\theta)]^2 \cdot r\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

No caso particular em que $d = 0$*, o toro se transforma em uma esfera (que é uma circunferência girando em torno dela própria na equação 54) e então* $\phi_1^*\omega = r^3\cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta$*.*

Agora se ω é uma 2-forma dada por $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, então

$$\begin{aligned}
\phi_2^*\omega &= (\phi_1^*\,\mathrm{d}x) \wedge (\phi_1^*\,\mathrm{d}y) \\
\phi_2^*\omega &= \left[\frac{\partial x}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right] \wedge \left[\frac{\partial y}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right] \\
\phi_2^*\omega &= \left[\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right]\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2^*\omega = \big[&- rd\sin(\theta)\cos^2(\varphi) - r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\varphi) - \\
&rd\sin(\theta)\sin^2(\varphi) - r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\varphi)\big]\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

$$\phi_2^*\omega = [(d + r\cos(\theta))r\sin(\theta)]\,\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}\theta$$

3.5 Inversa do lema de Poincaré

Usando as equações (44) e (46), podemos ver que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = \boldsymbol{\nabla} \times (\Gamma(\mathrm{d}f)) &= \Gamma\big[\,*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\Gamma(\mathrm{d}f)))\big] \\
&= \Gamma\big[\,*\,\mathrm{d}(\mathrm{d}f)\big] = \Gamma(*0) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ou seja, o lema de Poincaré $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$ implica que o rotacional do gradiente (definidos pelas equações 44 e 46) de uma função real suave f é sempre o vetor nulo.

Usando as equações (45) e (46), também temos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \Gamma\big[\,*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))\big]& \\
&= *\,\mathrm{d}(*\Gamma^{-1}(\Gamma\big[\,*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))\big])) \\
&= *\,\mathrm{d}(*(*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F})))) \\
&= *\,\mathrm{d}(\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que

$$*(*\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) = (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}\Gamma^{-1}(\mathbf{F})$$

com $p = 1$, $n = 3$ e $t = 3$, com t sendo a assinatura do produto interno (que é o produto escalar usual, no qual é positivo definido). Então o lema de Poincaré também implica que o divergente do rotacional (definidos pelas equações 45 e 46) de um campo vetorial real suave é sempre zero.

Por outro lado, vimos na seção 1.2.2 que sob certas circunstâncias, se $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} V$ para alguma função escalar V e que se $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 0$, então $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ para algum campo vetorial $\mathbf{A}$. Em outras palavras, nessas mesmas circunstâncias, se $\mathrm{d}\omega = 0$, então há algum α tal que $\mathrm{d}\alpha = \omega$, de forma que $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$. Iremos verificar no próximo teorema quais são os requisitos para isso ser verdade.

Teorema 3.4 (Inversa do lema de Poincaré). *Se ω é uma p-forma ($p \geqslant 1$) em um conjunto estrelado $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{d}\omega = 0$, então existe uma $(p-1)$-forma α tal que*

$$\mathrm{d}\alpha = \omega$$

Demonstração. Seja I o intervalo dos reais $[0,1]$. Podemos montar um objeto $(t, \mathbf{u})$ que está associado simultaneamente a um $t \in I$ e a um elemento $\mathbf{u} \in U$, de forma que a totalidade desses objetos formam um conjunto $I \times U$.

Dada uma função escalar bem comportada $f = f(x^i, t)$, onde x^i são as coordenadas relacionadas a U, temos que a 1-forma

$$\mathrm{d}f = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\right] + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

pertence ao espaço $\bigwedge^1(T^*(I \times U))$.

Agora seja j_1 o mapa que leva $\mathbf{u} \in U$ para $(1, \mathbf{u})$, dado por

$$\begin{aligned} j_1 &: U \mapsto (I \times U) \\ j_1(\mathbf{u}) &= (1, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

De maneira similar, definimos j_0:

$$\begin{aligned} j_0 &: U \mapsto (I \times U) \\ j_0(\mathbf{u}) &= (0, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Conforme vimos na seção 3.4, podemos definir funções $j^*_{1_p}$ e $j^*_{0_p}$ que levam uma p-forma com domínio em $I \times U$ para uma p-forma com domínio em U:

$$\begin{aligned} j^*_{1_p} &: \bigwedge^p(T^*(I \times U)) \mapsto \bigwedge^p(T^*U) \\ j^*_{0_p} &: \bigwedge^p(T^*(I \times U)) \mapsto \bigwedge^p(T^*U) \end{aligned}$$

Os mapeamentos j_1 e j_0 são dados por

$$\begin{aligned} j_1 &: (x^1, x^2, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, x^2, \ldots, x^n, 1) \\ j_0 &: (x^1, x^2, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, x^2, \ldots, x^n, 0) \end{aligned}$$

Então no caso em que $p = 0$, por exemplo, temos que

$$\begin{aligned} j^*_{1_0} f(x^i, t) &= f(x^i, 1) \\ j^*_{0_0} f(x^i, t) &= f(x^i, 0) \end{aligned}$$

enquanto que com $p = 1$,

$$\begin{aligned} j_{1_1}^*(\mathrm{d}f) &= j_{1_1}^*\left(\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\right] + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{t=1} j_{1_1}^*(\mathrm{d}x^i)\right] + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=1} j_{1_1}^*(\mathrm{d}t) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{t=1} \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j\right] + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial t}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \end{aligned}$$

Como t independe das coordenadas, $\dfrac{\partial t}{\partial x^j} = 0$. Além disso, uma vez que as coordenadas x^i são linearmente independentes entre si, temos $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$. Logo

$$j_{1_1}^*(\mathrm{d}f) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{t=1} \mathrm{d}x^i$$

De maneira totalmente análoga,

$$j_{0_1}^*(\mathrm{d}f) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{t=0} \mathrm{d}x^i$$

Em geral, dada uma p-forma ω, $j_{1_p}^*\omega$ faz a 1-forma $\mathrm{d}t$ desaparecer e fixar $t = 1$ em ω. Já $j_{0_p}^*\omega$ também limpa os termos com $\mathrm{d}t$ mas faz $t = 0$. Isso é garantido pela propriedade distributiva dos mapas (item 2 do teorema 3.3), já que qualquer termo com $\mathrm{d}t$ resultará em um $j_{1_1}^*(\mathrm{d}t) = 0$ ou $j_{0_1}^*(\mathrm{d}t) = 0$.

Agora iremos definir uma transformação linear $K : \bigwedge^{p+1}(T^*(I \times U)) \mapsto \bigwedge^{p}(T^*U)$ da seguinte forma: K sempre levará ao elemento nulo qualquer argumento que não envolva $\mathrm{d}t$, isto é, se $\mathrm{d}x^H \in \bigwedge^{p+1}(T^*U)$ e $a_H \in \mathbb{R}$, então

$$K\left(a_H(t, \mathbf{u})\,\mathrm{d}x^H\right) = 0$$

E quando há $\mathrm{d}t$ no argumento, se $\mathrm{d}x^J \in \bigwedge^{p}(T^*U)$ e $a_J \in \mathbb{R}$, definimos K pela equação

$$K\left(a_J(t, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^J\right) = \left[\int_0^1 a_J(t, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x^J \tag{55}$$

Iremos primeiramente provar que

$$K(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(K(\omega)) = j_{1_{p+1}}^*\omega - j_{0_{p+1}}^*\omega \tag{56}$$

Para isso, suponha $\lambda = a_J(t, \mathbf{u})\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^J$ uma $(p+1)$-forma em $I \times U$ que contenha $\mathrm{d}t$. Então

$$\mathrm{d}\lambda = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_J}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^J\right] + \frac{\partial a_J}{\partial t}\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^J$$

$$\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial a_J}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^J$$

Aplicando K a $\mathrm{d}\lambda$, obteremos

$$K(\mathrm{d}\lambda) = -\sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 \frac{\partial a_J}{\partial x^i}\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^J$$

Agora sabendo que

$$K(\lambda) = \left[\int_0^1 a_J(t,\mathbf{u})\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x^J$$

podemos aplicar a derivada exterior a esse resultado para obter

$$\mathrm{d}(K(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\int_0^1 a_J(t,\mathbf{u})\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^J$$

$$\mathrm{d}(K(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 \frac{\partial a_J}{\partial x^i}\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^J$$

que é $K(\mathrm{d}\lambda)$ mas com sinal trocado. Então

$$K(\mathrm{d}\lambda) + \mathrm{d}(K(\lambda)) = 0$$

Mas também sabemos que λ é um termo só e ele possui $\mathrm{d}t$, o que leva $j^*_{1_{p+1}}\lambda = 0$ e $j^*_{0_{p+1}}\lambda = 0$. Esse resultado mostra concordância com a equação (56).

Agora vamos para o caso da $(p+1)$-forma $\omega = a_H(t,\mathbf{u})\,\mathrm{d}x^H$ que não tem $\mathrm{d}t$. Então

$$\mathrm{d}\omega = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_H}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H\right] + \frac{\partial a_H}{\partial t}\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^H$$

Logo $K(\mathrm{d}\omega)$ fará o primeiro termo com a somatória desaparecer, sobrando apenas

$$K(\mathrm{d}\omega) = \left[\int_0^1 \frac{\partial a_H(t,\mathbf{u})}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x^H = \left[a_H(1,\mathbf{u}) - a_H(0,\mathbf{u})\right] \mathrm{d}x^H$$

Por outro lado, $K(\omega) = 0$ e portanto $\mathrm{d}(K(\omega)) = 0$. E também sabemos que

$$a_H(1,\mathbf{u})\,\mathrm{d}x^H = j^*_{1_{p+1}}\omega \quad \text{e} \quad a_H(0,\mathbf{u})\,\mathrm{d}x^H = j^*_{0_{p+1}}\omega$$

e portanto

$$K(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(K(\omega)) = j^*_{1_{p+1}}\omega - j^*_{0_{p+1}}\omega \tag{57}$$

Como K é uma transformação linear, essa equação se estende para qualquer (p+1)-forma em $I \times U$, seja ela dependente de $\mathrm{d}t$ ou não.

Agora seja ϕ um mapa dado por

$$\begin{aligned}
&\phi : I \times U \mapsto U \\
&\phi(1,\mathbf{v}) = \mathbf{v} \\
&\phi(0,\mathbf{v}) = \mathbf{v}_0
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{v}_0 = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$ aponta para um ponto no conjunto U no qual U é estrelado. Segue que ϕ é dado por

$$\phi : (x^1, x^2, \ldots, x^n, t) \mapsto (u^1, u^2, \ldots, u^n) \tag{58}$$

onde $u^i = u^i(x^j, t)$ são coordenadas tais que satisfazem as condições de contorno

$$u^i(x^j, 1) = x^i \qquad \text{e} \qquad u^i(x^j, 0) = v^i$$

além de que $u^i \in U$ e que as derivadas parciais $\dfrac{\partial u^i}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial u^i}{\partial x^j}$ existam para todo $t \in [0, 1]$, $\forall i, j$ e em todo o domínio U. Exemplos de coordenada desse tipo são

$$u^i = v^i + t(x^i - v^i) \qquad \text{e} \qquad u^i = v^i + (x^i - v^i)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Dado que o conjunto é estrelado em $\mathbf{v}_0$, então usaremos

$$u^i = v^i + (x^i - v^i)h(t)$$

onde $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ e que $\dfrac{dh}{dt}$ exista $\forall t \in [0, 1]$. Então

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \delta^i_j \cdot h(t)$$

Dada uma função escalar $g(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, segue de (58) que $\phi_0^*(g)$ leva a 0-forma g às coordenadas x^j e t:

$$\phi_0^*(g) = g(u^i(x^j, t)) \tag{59}$$

E para uma 1-forma dg dada por

$$\mathrm{d}g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u^i}\,\mathrm{d}u^i$$

então

$$\begin{aligned}
\phi_1^*(\mathrm{d}g) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j\right] + \frac{\partial g}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u^i}\delta^i_j \cdot h(t)\,\mathrm{d}x^j\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\
&= h(t)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u^i}\,\mathrm{d}x^i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{60}$$

Aplicando $j_{1_1}^*$ e $j_{0_1}^*$ à 1-forma $\phi_1^*(\mathrm{d}g)$ em (60), iremos obter

$$\begin{aligned}
j_{1_1}^*(\phi_1^*(\mathrm{d}g)) &= h(1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u^i}\bigg|_{t=1}\mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}g \\
j_{0_1}^*(\phi_1^*(\mathrm{d}g)) &= h(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u^i}\bigg|_{t=0}\mathrm{d}x^i = 0
\end{aligned}$$

Então para qualquer p-forma $\omega \in C^\infty U$, com $p \geqslant 1$ temos

$$(j_{1_p}^* \circ \phi_p^*)\omega = \omega \tag{61}$$
$$(j_{0_p}^* \circ \phi_p^*)\omega = 0 \tag{62}$$

Isso pode ser verificado por indução. Se as equações (61) e (62) são válidas para um certo p, então dada uma 1-forma λ e uma p-forma ω temos

$$\begin{aligned} j_{1_{p+1}}^*(\phi_{p+1}^*(\omega \wedge \lambda)) &= j_{1_{p+1}}^*(\phi_p^*(\omega) \wedge \phi_1^*(\lambda)) \\ &= j_{1_p}^*(\phi_p^*(\omega)) \wedge j_{1_1}^*(\phi_1^*(\lambda)) \\ &= \omega \wedge \lambda \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$j_{0_{p+1}}^*(\phi_{p+1}^*(\omega \wedge \lambda)) = j_{0_p}^*(\phi_p^*(\omega)) \wedge j_{0_1}^*(\phi_1^*(\lambda)) = 0$$

Agora seja ω a p-forma do enunciado, ou seja, sabe-se que $\mathrm{d}\omega = 0$. Então usando $\phi_{p+1}^*\omega$ como argumento na equação (57) obteremos

$$\begin{aligned} K(\mathrm{d}(\phi_p^*\omega)) + \mathrm{d}(K(\phi_p^*\omega)) &= j_{1_p}^*(\phi_p^*\omega) - j_{0_p}^*(\phi_p^*\omega) \\ K(\phi_p^*(\mathrm{d}\omega)) + \mathrm{d}(K(\phi_p^*\omega)) &= (j_{1_p}^* \circ \phi_p^*)\omega - (j_{0_p}^* \circ \phi_p^*)\omega \\ K(\phi_p^* 0) + \mathrm{d}(K(\phi_p^*\omega)) &= \omega - 0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}(K(\phi_p^*\omega)) = \omega$$

Fazendo $\alpha = K(\phi_p^*\omega)$, concluímos que

$$\mathrm{d}\alpha = \omega$$

o que completa a demonstração. ■

Note que se duas p-formas β e α produzirem uma mesma (p+1)-forma ω pelo operador d, então

$$\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\alpha = \omega \implies \mathrm{d}(\beta - \alpha) = 0$$

e portanto da inversa do lema de Poincaré temos que

$$\beta - \alpha = \mathrm{d}\gamma$$

ou equivalentemente

$$\beta = \alpha + \mathrm{d}\gamma$$

Isso significa que β e α podem diferir de apenas um $\mathrm{d}\gamma$, com γ sendo uma (p-1)-forma arbitrária.

Exemplo 3.7 (Divergente nulo e o rotacional)**.** *Suponha ω uma 2-forma dada por*

$$\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

de forma que em um subconjunto U de $\mathbb{R}^3$ estrelado na origem é verdade

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0$$

ou equivalentemente

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \tag{63}$$

Podemos construir um mapa $\phi : ([0,1] \times U) \mapsto U$ dado por

$$\phi(x,y,z,t) = (tx, ty, tz)$$

cuja imagem é a reta que conecta a origem até (x,y,z). Pelo fato do conjunto ser estrelado na origem, toda a reta pertence a U.

Usando a equação (53)*, temos que ϕ_2^* leva uma 2-forma em U para uma 2-forma em $[0,1] \times U$ dada por*

$$\phi_2^*(P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = \frac{P(tx,ty,tz)}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{4} \frac{\partial(ty,tz)}{\partial(x^i,x^j)}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

com $x^4 = t$. Os únicos jacobianos não nulos (além das comutações de x^i e x^j) serão

$$\frac{\partial(ty,tz)}{\partial(y,z)} = t^2$$
$$\frac{\partial(ty,tz)}{\partial(t,z)} = yt$$
$$\frac{\partial(ty,tz)}{\partial(y,t)} = tz$$
$$\frac{\partial(ty,tz)}{\partial(t,t)} = yz$$

Porém o primeiro resulta em um fator de $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ enquanto que o último resulta em $\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}t = 0$. Ao aplicarmos K a $\phi_2^*(P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$, o primeiro desaparecerá, e então os únicos relevantes serão o segundo e o terceiro. Com as comutações de x^i e x^j, aparecerão termos iguais porém negativos, o que pode ser mudado ao comutar $\mathrm{d}x^i$ com $\mathrm{d}x^j$, resultando em um fator 2 que cancelará com $1/2$, resultando

$$\phi_2^*(P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = P(tx,ty,tz) \cdot [yt\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z + tz\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + t^2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z]$$

Para deixarmos tudo com orientação positiva (primeiro $\mathrm{d}t$ e depois as coordenadas x, y e z) e então usar a relação do operador K dada por (55)*, comutaremos $\mathrm{d}y$ com $\mathrm{d}t$. Fazendo isso e colocando t em evidência, ficamos com*

$$\phi_2^*(P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) = t \cdot P(tx,ty,tz) \cdot [y\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y] + (\textit{termos sem } \mathrm{d}t)$$

De maneira análoga, encontraremos

$$\phi_2^*(Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x) = t\cdot Q(tx,ty,tz)\cdot[z\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z] + (\textit{termos sem } \mathrm{d}t)$$
$$\phi_2^*(R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y) = t\cdot R(tx,ty,tz)\cdot[x\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x] + (\textit{termos sem } \mathrm{d}t)$$

Aplicando K *a* $\phi_2^*\omega$*, obteremos uma 1-forma dada por*

$$K(\phi_2^*\omega) = \left[\int_0^1 t\cdot P(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\right](y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y) + \left[\int_0^1 t\cdot Q(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\right](z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z) + \left[\int_0^1 t\cdot R(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\right](x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$$

Para calcularmos $\mathrm{d}K(\phi_2^*\omega)$*, vamos aplicar a derivada exterior para cada termo:*

$$\mathrm{d}\left(\left[\int_0^1 t\cdot P(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\right] y\,\mathrm{d}z\right) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\int_0^1 yt\cdot P(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^1 yt\cdot P(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^1 yt\cdot P(tx,ty,tz)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$
$$= \left[\int_0^1 yt\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + \left[\int_0^1 t\cdot P + yt\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

Mas

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial(tx)}\frac{\partial(tx)}{\partial x} = t\frac{\partial P}{\partial(tx)}$$

e também $\dfrac{\partial P}{\partial y} = t\dfrac{\partial P}{\partial(ty)}$*, e então*

$$\mathrm{d}\left(\left[\int_0^1 t\cdot P\,\mathrm{d}t\right] y\,\mathrm{d}z\right) = \left[\int_0^1 yt^2\cdot\frac{\partial P}{\partial(tx)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + \left[\int_0^1 t\cdot P + yt^2\frac{\partial P}{\partial(ty)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

De maneira análoga, temos

$$\mathrm{d}\left(\left[\int_0^1 t\cdot P\,\mathrm{d}t\right] z\,\mathrm{d}y\right) = \left[\int_0^1 zt^2\cdot\frac{\partial P}{\partial(tx)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \left[\int_0^1 t\cdot P + zt^2\frac{\partial P}{\partial(tz)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\left(\left[\int_0^1 t\cdot Q\,\mathrm{d}t\right] z\,\mathrm{d}x\right) = \left[\int_0^1 zt^2\cdot\frac{\partial Q}{\partial(ty)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \left[\int_0^1 t\cdot Q + zt^2\frac{\partial Q}{\partial(tz)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\left(\left[\int_0^1 t\cdot Q\,\mathrm{d}t\right] x\,\mathrm{d}z\right) = \left[\int_0^1 xt^2\cdot\frac{\partial Q}{\partial(ty)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left[\int_0^1 t\cdot Q + xt^2\frac{\partial Q}{\partial(tx)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\left(\left[\int_0^1 t\cdot R\,\mathrm{d}t\right] x\,\mathrm{d}y\right) = \left[\int_0^1 xt^2\cdot\frac{\partial R}{\partial(tz)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y + \left[\int_0^1 t\cdot R + xt^2\frac{\partial R}{\partial(tx)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\left(\left[\int_0^1 t\cdot R\,\mathrm{d}t\right] y\,\mathrm{d}x\right) = \left[\int_0^1 yt^2\cdot\frac{\partial R}{\partial(tz)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left[\int_0^1 t\cdot R + yt^2\frac{\partial R}{\partial(ty)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$$

E então juntando os termos de $\mathrm{d}K(\phi_2^*\omega)$ que estão relacionados a $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ ficamos com

$$\mathrm{d}K(\phi_2^*\omega) = \ldots + \\ + \left[\int_0^1 -zt^2\cdot\frac{\partial P}{\partial(tx)} - zt^2\cdot\frac{\partial Q}{\partial(ty)} + 2t\cdot R + yt^2\frac{\partial R}{\partial(ty)} + xt^2\frac{\partial R}{\partial(tx)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

Mas da equação (63) *sabemos que*

$$\frac{\partial R}{\partial(tz)} = -\frac{\partial P}{\partial(tx)} - \frac{\partial Q}{\partial(ty)}$$

é verdade para todo t em $[0,1]$ (pois o conjunto é estrelado) e portanto

$$\mathrm{d}K(\phi_2^*\omega) = \ldots + \\ + \left[\int_0^1 zt^2\cdot\frac{\partial R}{\partial(tz)} + 2t\cdot R + yt^2\frac{\partial R}{\partial(ty)} + xt^2\frac{\partial R}{\partial(tx)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

Agora note que

$$t^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = t^2\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial(tx)}\frac{\partial(tx)}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial(ty)}\frac{\partial(ty)}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial(tz)}\frac{\partial(tz)}{\partial t}\right)$$
$$t^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = xt^2\frac{\partial R}{\partial(tx)} + yt^2\frac{\partial R}{\partial(ty)} + zt^2\cdot\frac{\partial R}{\partial(tz)}$$

Logo

$$\mathrm{d}K(\phi_2^*\omega) = \ldots + \left[\int_0^1 t^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + 2t\cdot R\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

Note também que

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[t^2R\right] = t^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + 2t\cdot R$$

e portanto

$$\begin{aligned}\mathrm{d}K(\phi_2^*\omega) &= \ldots + \left[\int_0^1 \frac{d}{\mathrm{d}t}\left[t^2R\right]\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &= \ldots + t^2R(tx,ty,tz)\Big|_0^1\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &= \ldots + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

O raciocínio é inteiramente análogo para mostrar que isso também acontece com os termos relacionados a $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ *e* $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$*, o que implica*

$$\mathrm{d}K(\phi_2^*\omega) = P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}K(\phi_2^*\omega) = \omega$$

Então encontramos uma 1-forma $\alpha = K(\phi_2^*\omega)$ *tal que* $\mathrm{d}\alpha = \omega$*. Agora note que mostramos no exemplo* (3.3) *que calcular* $\mathrm{d}\alpha$*, com* α *sendo uma 1-forma é equivalente a calcular o rotacional de algum outro campo vetorial. Se reescrevermos* α *na forma*

$$\alpha = \left[\int_0^1 t(zQ-yR)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x + \left[\int_0^1 t(xR-zP)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y + \left[\int_0^1 t(yP-xQ)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z$$

então identificamos o espaço vetorial $\mathbf{A}$ *cujo rotacional reproduz o campo vetorial* (P,Q,R)*:*

$$\mathbf{A} = \left(\int_0^1 t(zQ-yR)\,\mathrm{d}t,\ \int_0^1 t(xR-zP)\,\mathrm{d}t,\ \int_0^1 t(yP-xQ)\,\mathrm{d}t\right)$$

Se $\mathbf{F} = (P,Q,R)$*, então observamos que*

$$\mathbf{F}(t\cdot\mathbf{r})\times(t\cdot\mathbf{r}) = t(zQ-yR)\hat{\mathbf{i}} + t(xR-zP)\hat{\mathbf{j}} + t(yP-xQ)\hat{\mathbf{k}}$$

e portanto

$$\mathbf{A} = \int_0^1 \mathbf{F}(t\cdot\mathbf{r})\times(t\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}t$$

que é exatamente a expressão que usamos na demonstração do teorema (1.11).

3.6 Coordenadas generalizadas

Sejam $\hat{\mathbf{e_1}}(x, y, z)$, $\hat{\mathbf{e_2}}(x, y, z)$ e $\hat{\mathbf{e_3}}(x, y, z)$ um conjunto ortonormal de campos vetoriais que variam suavemente em uma região do $\mathbb{R}^3$. Eles podem ser escritos na forma

$$\hat{\mathbf{e_i}} = f_{i1}(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + f_{i2}(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + f_{i3}(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}$$

Segue disso que

$$\hat{\mathbf{e_i}} \cdot \hat{\mathbf{e_j}} = f_{i1}f_{j1} + f_{i2}f_{j2} + f_{i3}f_{j3} = \delta_{ij}$$

Aplicando a derivada exterior nessa expressão, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\hat{\mathbf{e_i}} \cdot \hat{\mathbf{e_j}}) &= (\mathrm{d}f_{i1})f_{j1} + (\mathrm{d}f_{i2})f_{j2} + (\mathrm{d}f_{i3})f_{j3} + f_{i1}(\mathrm{d}f_{j1}) + f_{i2}(\mathrm{d}f_{j2}) + f_{i3}(\mathrm{d}f_{j3}) \\
\mathrm{d}(\hat{\mathbf{e_i}} \cdot \hat{\mathbf{e_j}}) &= \mathrm{d}\hat{\mathbf{e_i}} \cdot \hat{\mathbf{e_j}} + \hat{\mathbf{e_i}} \cdot \mathrm{d}\hat{\mathbf{e_j}} \\
&= \mathrm{d}\delta_{ij} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto temos

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_i}} \cdot \hat{\mathbf{e_j}} + \hat{\mathbf{e_i}} \cdot \mathrm{d}\hat{\mathbf{e_j}} = 0 \tag{64}$$

Cada vetor $\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_i}}$ pode ser descrito usando a mesma base $\{\hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_3}}\}$,

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_i}} = \omega_{i1}\hat{\mathbf{e_1}} + \omega_{i2}\hat{\mathbf{e_2}} + \omega_{i3}\hat{\mathbf{e_3}} \tag{65}$$

mas com os elementos ω_{ij} sendo 1-formas. Segue disso que

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_i}} \cdot \hat{\mathbf{e_j}} = \omega_{ij}$$

Por outro lado, trocando i e j de lugar obtemos

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_j}} \cdot \hat{\mathbf{e_i}} = \omega_{ji}$$

Usando a equação (64), chegamos à conclusão que

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$$

ou equivalentemente

$$\omega_{ji} = -\omega_{ij} \tag{66}$$

Isso significa que podemos montar uma matriz anti-simétrica Ω com as 1-formas ω_{ij}.

Uma variação infinitesimal no espaço $\mathbb{R}^3$ em coordenadas cartesianas pode ser descrita com um vetor $\mathrm{d}\mathbf{r}$ cujas componentes são 1-formas, dado por

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{d}y\hat{\mathbf{j}} + \mathrm{d}z\hat{\mathbf{k}}$$

Essa mesma variação pode ser descrita usando a base ortonormal $\{\hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_3}}\}$:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma_1\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_2\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_3\hat{\mathbf{e_3}} \tag{67}$$

com σ_i sendo 1-formas.

Fazendo

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e_1}} \\ \hat{\mathbf{e_2}} \\ \hat{\mathbf{e_3}} \end{bmatrix} \qquad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Omega = [\omega_{ij}]$$

e considerando que a derivada exterior d aplicada a uma matriz é a matriz com d aplicado aos seus elementos podemos compactar as equações (65), (66) e (67) com as expressões

$$\mathrm{d}\mathbf{e} = \Omega\mathbf{e} \tag{68}$$

$$\Omega^T = -\Omega \tag{69}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma\mathbf{e} \tag{70}$$

Uma das utilidades dessa notação é a de que pode ser facilmente generalizada para dimensões maiores do que três.

Como os campos $\hat{\mathbf{e_i}}$ variam suavemente no espaço, as derivadas parciais comutam e portanto como consequência vale o lema de Poincaré:

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_i}}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r}) = 0$$

Da primeira igualdade, de (65) obtemos

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_i}}) = (\mathrm{d}\omega_{i1})\hat{\mathbf{e_1}} + \ldots + (\mathrm{d}\omega_{i3})\hat{\mathbf{e_3}} + (-1)^1(\omega_{i1}\,\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_1}} + \ldots + \omega_{i3}\,\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_3}})$$

Usando (65) na segunda parcela, teremos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_i}}) = (\mathrm{d}\omega_{i1})\hat{\mathbf{e_1}} + \ldots + (\mathrm{d}\omega_{i3})\hat{\mathbf{e_3}} - [\omega_{i1}\omega_{11} + \omega_{i2}\omega_{21} + \omega_{i3}\omega_{31}]\,\hat{\mathbf{e_1}} - \\ [\omega_{i1}\omega_{12} + \omega_{i2}\omega_{22} + \omega_{i3}\omega_{32}]\,\hat{\mathbf{e_2}} - [\omega_{i1}\omega_{13} + \omega_{i2}\omega_{23} + \omega_{i3}\omega_{33}]\,\hat{\mathbf{e_3}} \end{aligned}$$

Note que os termos entre parênteses são os elementos da multiplicação de Ω com ela própria. Segue disso que

$$0 = (\mathrm{d}\Omega - \Omega^2)\mathbf{e}$$

$$\mathrm{d}\Omega = \Omega^2$$

De maneira similar, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r}) &= (\mathrm{d}\sigma)\mathbf{e} - \sigma\,\mathrm{d}\mathbf{e} \\ \mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r}) &= (\mathrm{d}\sigma)\mathbf{e} - \sigma\Omega\mathbf{e} \\ 0 &= (\mathrm{d}\sigma - \sigma\Omega)\mathbf{e} \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \sigma\Omega$$

Exemplo 3.8 (Coordenadas esféricas)**.** *As transformações das coordenadas esféricas para cartesianas são dadas por*

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}$$

Aplicando o operador diferencial às três coordenadas obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\mathrm{d}r + r\cos(\theta)\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\theta - r\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
\mathrm{d}y &= \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}r + r\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta + r\sin(\theta)\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
\mathrm{d}z &= \cos(\theta)\,\mathrm{d}r - r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

e portanto o elemento infinitesimal $\mathrm{d}\mathbf{r}$ *fica*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r} = &\big(\sin(\theta)\cos(\varphi),\ \sin(\theta)\sin(\varphi),\ \cos(\theta)\big)\,\mathrm{d}r + \\
&\big(r\cos(\theta)\cos(\varphi),\ r\cos(\theta)\sin(\varphi),\ -r\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta + \\
&\big(-r\sin(\theta)\sin(\varphi),\ r\sin(\theta)\cos(\varphi),\ 0\big)\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

Agora sabendo que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \big(\sin(\theta)\cos(\varphi),\ \sin(\theta)\sin(\varphi),\ \cos(\theta)\big) \\
\hat{\theta} &= \big(\cos(\theta)\cos(\varphi),\ \cos(\theta)\sin(\varphi),\ -\sin(\theta)\big) \\
\hat{\varphi} &= \big(-\sin(\varphi),\ \cos(\varphi),\ 0\big)
\end{aligned}$$

podemos reescrever $\mathrm{d}\mathbf{r}$ *na forma*

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}r\hat{\mathbf{r}} + r\,\mathrm{d}\theta\hat{\theta} + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\hat{\varphi}$$

Daí identificamos

$$\hat{\mathbf{e_1}} = \hat{\mathbf{r}} \qquad \hat{\mathbf{e_2}} = \hat{\theta} \quad e \quad \hat{\mathbf{e_3}} = \hat{\varphi}$$

$$\sigma_1 = \mathrm{d}r \qquad \sigma_2 = r\,\mathrm{d}\theta \quad e \quad \sigma_3 = r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi$$

Agora note que

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$$

é o elemento de volume $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

Para encontrarmos a matriz Ω*, primeiramente aplicamos a derivada exterior ao versor* $\hat{\mathbf{r}}$*:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}} = &(\cos(\theta)\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\theta - \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \\
&(\cos(\theta)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta + \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi)\hat{\mathbf{j}} - \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

que é

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}} = 0\hat{\mathbf{r}} + \mathrm{d}\theta\hat{\theta} + \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\hat{\varphi}$$

Portanto identificamos

$$\omega_{11} = 0 \qquad \omega_{12} = \mathrm{d}\theta \quad e \quad \omega_{13} = \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi$$

De maneira similar, para $\mathrm{d}\hat{\theta}$ *e* $\mathrm{d}\hat{\varphi}$ *encontramos*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{\theta} = &(-\sin(\theta)\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\theta - \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \\
&(-\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta + \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi)\hat{\mathbf{j}} - \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\hat{\varphi} = -\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\hat{\mathbf{i}} - \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} \tag{71}$$

ou equivalentemente

$$\mathrm{d}\hat{\theta} = -\,\mathrm{d}\theta\hat{\mathbf{r}} + 0\hat{\theta} + \cos(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\hat{\varphi}$$

Para encontrarmos $\mathrm{d}\hat{\varphi}$ *na base* $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$*, devemos escrevê-lo em função de* $\hat{\mathbf{r}}$ *e* $\hat{\theta}$ *de forma que a coordenada em* $\hat{\mathbf{k}}$ *se anule. Para isso, multiplicamos* $\hat{\mathbf{r}}$ *por* $\sin(\theta)$ *e* $\hat{\theta}$ *por* $\cos(\theta)$ *para então somar:*

$$\begin{aligned}\sin(\theta)\hat{\mathbf{r}} + \cos(\theta)\hat{\theta} = \big(&\sin^2(\theta)\cos(\varphi),\ \sin^2(\theta)\sin(\varphi),\ \sin(\theta)\cos(\theta)\big) + \\ &\big(\cos^2(\theta)\cos(\varphi),\ \cos^2(\theta)\sin(\varphi),\ -\sin(\theta)\cos(\theta)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\theta)\hat{\mathbf{r}} + \cos(\theta)\hat{\theta} &= \big((\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))\cos(\varphi),\ (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))\sin(\varphi),\ 0\big) \\ &= \big(\cos(\varphi),\ \sin(\varphi),\ 0\big)\end{aligned}$$

que é (71) *a menos de um fator* $-\,\mathrm{d}\varphi$ *e portanto*

$$\mathrm{d}\hat{\varphi} = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\hat{\mathbf{r}} - \cos(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\hat{\theta}$$

Com isso, a matriz $\Omega = [\omega_{ij}]$ *fica*

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{d}\theta & \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi \\ -\,\mathrm{d}\theta & 0 & \cos(\theta)\,\mathrm{d}\varphi \\ -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi & -\cos(\theta)\,\mathrm{d}\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

Note que Ω *é anti-simétrica, conforme vimos anteriormente.*

Cada versor da base ortonormal $\{\hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_3}}\}$ pode ser escrito na forma

$$\hat{\mathbf{e_i}} = b_{i1}\hat{\mathbf{i}} + b_{i2}\hat{\mathbf{j}} + b_{i3}\hat{\mathbf{k}}$$

Na notação matricial, isso é

$$\mathbf{e} = B\mathbf{i}$$

onde agora $B = [b_{ij}]$ e

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix}$$

Dado que a base $\{\hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_3}}\}$ é ortonormal, segue que

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T = [\hat{\mathbf{e_i}} \cdot \hat{\mathbf{e_j}}] = I$$

onde $[\hat{\mathbf{e_i}} \cdot \hat{\mathbf{e_j}}]$ é a matriz de Gram dos versores $\hat{\mathbf{e_i}}$, com a multiplicação dos elementos sendo um produto interno. Mas por outro lado, temos

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T = (B\mathbf{i})\left(\mathbf{i}^T B^T\right) = B(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}^T)B^T = BIB^T = BB^T$$

e portanto B é uma matriz ortogonal, ou seja, $BB^T = I \implies B^{-1} = B^T$.

Da equação (70) temos que

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma\mathbf{e} = \sigma B\mathbf{i}$$

Entretanto também temos

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{d}y\hat{\mathbf{j}} + \mathrm{d}z\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{bmatrix} \mathbf{i}$$

Segue disso que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{bmatrix} \mathbf{i} = \sigma B\mathbf{i}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \sigma B$$

ou equivalentemente

$$\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{3} b_{1i}\sigma_i \qquad \mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{3} b_{2j}\sigma_j \quad \text{e} \quad \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{3} b_{3k}\sigma_k$$

Logo

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \left(\sum_{i=1}^{3} b_{1i}\sigma_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} b_{2j}\sigma_j\right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{3} b_{3k}\sigma_k\right)$$

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \sum_{ijk=1}^{3} b_{1i}b_{2j}b_{3k}\,(\sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \sigma_k)$$

Conforme já vimos na seção (2.1), essa última expressão é equivalente a $B\sigma_1 \wedge B\sigma_2 \wedge B\sigma_3$, que por sua vez é equivalente a $|B|(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3)$, onde $|B|$ é o determinante de B. Mas como B é uma matriz ortogonal, então

$$1 = \det I = \det\bigl(BB^{-1}\bigr) = (\det B) \cdot (\det B^T) = (\det B)^2$$

e portanto $\det B = \pm 1$. Assumindo que $\sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \sigma_k$ forma uma base com orientação positiva, conforme vimos na seção (2.4) por definição uma base positiva se transforma em uma outra base positiva usando uma matriz com determinante positivo. Logo $\det B = 1$, implicando que

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \tag{72}$$

O resultado (72) aparece no exemplo (3.8), onde encontramos

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$$

Dado $\mathbf{e} = B\mathbf{i}$, temos também $\mathbf{i} = B^{-1}\mathbf{e}$ e portanto

$$\mathrm{d}\mathbf{e} = (\mathrm{d}B)\mathbf{i} = (\mathrm{d}B)B^{-1}\mathbf{e}$$

Mas de (68) sabemos que d$\mathbf{e} = \Omega\mathbf{e}$ e consequentemente obtemos a matriz anti-simétrica

$$\Omega = (\mathrm{d}B)B^{-1}$$

Esse resultado pode ser estendido pelo seguinte teorema:

Teorema 3.5. *Se A for uma matriz ortogonal cujos elementos são funções das coordenadas então $(\mathrm{d}A)A^{-1}$ será uma matriz anti-simétrica.*

Demonstração. Dado que A é ortogonal, então $A^TA = I$. Aplicando a derivada exterior em ambos os lados obteremos[9]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(AA^T) &= \mathrm{d}I \\ (\mathrm{d}A)A^T + A(\mathrm{d}A^T) &= 0 \\ (\mathrm{d}A)A^{-1} + A(\mathrm{d}A)^T &= 0 \\ (\mathrm{d}A)A^{-1} + \big((\mathrm{d}A)A^T\big)^T &= 0 \\ \big((\mathrm{d}A)A^{-1}\big)^T &= -(\mathrm{d}A)A^{-1} \end{aligned}$$

o que mostra que a matriz $(\mathrm{d}A)A^{-1}$ é anti-simétrica. ■

Teorema 3.6. *Seja A for uma matriz cujos elementos são funções das coordenadas definidas em um conjunto U e A é ortogonal para um certo ponto $\mathbf{u}_0$ em U. Então se $\mathrm{d}A = DA$, onde D é uma matriz anti-simétrica, então A é ortogonal em todo U.*

Demonstração. Seja $C = A^TA$. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{d}C &= \mathrm{d}(A^TA) \\ &= (\mathrm{d}A^T)A + A^T(\mathrm{d}A) \\ &= (DA)^TA + A^T(DA) \\ &= A^TD^TA + A^TDA \\ &= -A^TDA + A^TDA \\ &= 0 \end{aligned}$$

e portanto a matriz $C = A^TA$ é constante em todo U. Mas como $A^TA = I$ para um certo ponto $\mathbf{u}_0$ em U, então segue que para qualquer ponto em U vale $A^TA = I$ e consequentemente A é ortogonal em todo U. ■

[9] A derivada exterior se distribui num produto de matrizes semelhante ao produto de funções, já que se $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de AB, então

$$\mathrm{d}(AB)_{ij} = \sum_k \mathrm{d}(a_{ik}b_{kj}) = \sum_k \mathrm{d}(a_{ik})b_{kj} + \sum_k a_{ik}\,\mathrm{d}(b_{kj}) = \Big[(\mathrm{d}A)B + A(\mathrm{d}B)\Big]_{ij}$$

Dada uma transformação $\mathbf{u} = A\mathbf{u}_0$, com A ortogonal, temos que $\mathbf{u}_0 = A^{-1}\mathbf{u}$ e então a variação infinitesimal em $\mathbf{u}$ é dada por

$$\mathrm{d}\mathbf{u} = \mathrm{d}(A\mathbf{u}_0) = (\mathrm{d}A)\mathbf{u}_0 = (\mathrm{d}A)A^{-1}\mathbf{u}$$

A nova posição do vetor $\mathbf{u}$ devido a uma variação infinitesimal $\mathrm{d}\mathbf{u}$ é portanto

$$\mathbf{u} + \mathrm{d}\mathbf{u} = \mathbf{u} + (\mathrm{d}A)A^{-1}\mathbf{u} = \big(I + (\mathrm{d}A)A^{-1}\big)\mathbf{u}$$

3.7 Gradiente, Divergente, Rotacional e Laplaciano

De agora em diante denotaremos $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ apenas como $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, ficando implícito o produto exterior entre as 1-formas e compactando a notação.

Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto de coordenadas do $\mathbb{R}^3$. O vetor posição $\mathbf{r}$ pode ser descrito como

$$\mathbf{r} = x(u, v, w)\hat{\mathbf{i}} + y(u, v, w)\hat{\mathbf{j}} + z(u, v, w)\hat{\mathbf{k}}$$

Uma variação infinitesimal em uma dessas coordenadas leva $\mathbf{r}$ a outro ponto próximo. No caso da coordenada u, o vetor de deslocamento infinitesimal é dado por

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u}\hat{\mathbf{k}}$$

Iremos definir $\hat{\mathbf{e_1}}$ como sendo o versor de $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, ou seja, o vetor que mostra a direção para onde $\mathbf{r}$ muda quando u tem uma pequena variação. Então multiplicando essa derivada parcial por alguma função λ de u, v e w obteremos $\hat{\mathbf{e_1}}$:

$$\hat{\mathbf{e_1}} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial y}{\partial u}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial u}\hat{\mathbf{k}} \tag{73}$$

Analogamente para v e w temos

$$\hat{\mathbf{e_2}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial x}{\partial v}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial y}{\partial v}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial z}{\partial v}\hat{\mathbf{k}} \tag{74}$$

$$\hat{\mathbf{e_3}} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial x}{\partial w}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial y}{\partial w}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial z}{\partial w}\hat{\mathbf{k}} \tag{75}$$

para certas funções μ e ν que respectivamente tornam $\hat{\mathbf{e_2}}$ e $\hat{\mathbf{e_3}}$ normais.

Agora note que aplicando a derivada exterior a $\mathbf{r}$ obteremos

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial x}{\partial w}\,\mathrm{d}w\right)\hat{\mathbf{i}} + \ldots + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial z}{\partial w}\,\mathrm{d}w\right)\hat{\mathbf{k}}$$

e portanto

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}w$$

Mas das equações (73), (74) e (75), temos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lambda\hat{\mathbf{e_1}} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mu\hat{\mathbf{e_2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \nu\hat{\mathbf{e_3}}$$

e então

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = (\lambda\,\mathrm{d}u)\hat{\mathbf{e_1}} + (\mu\,\mathrm{d}v)\hat{\mathbf{e_2}} + (\nu\,\mathrm{d}w)\hat{\mathbf{e_3}}$$

Comparando essa expressão com $\mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma_1\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_2\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_3\hat{\mathbf{e_3}}$, concluímos que

$$\sigma_1 = \lambda\,\mathrm{d}u \qquad \sigma_2 = \mu\,\mathrm{d}v \quad \text{ e } \quad \sigma_3 = \nu\,\mathrm{d}w$$

As coordenadas $\{u, v, w\}$ são ditas ortogonais se $\{\hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_3}}\}$ formarem uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$. Supondo que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ constitui uma base positiva do espaço das 3-formas, então segue que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ e então poderemos usar o operador estrela nas 1-formas σ_i da maneira usual que vimos na seção (2.4).

Exemplo 3.9 (Gradiente)**.** *Dada uma função escalar f e um conjunto de coordenadas $\{u, v, w\}$, temos que*

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial f}{\partial w}\,\mathrm{d}w$$

e então

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\sigma_1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\sigma_2 + \frac{1}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\sigma_3$$

Agora iremos definir[10] *uma transformação linear Γ tal que*

$$\Gamma(\sigma_i) = \hat{\mathbf{e_i}}$$

Segue disso que

$$\Gamma(\mathrm{d}f) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{\mathbf{e_1}} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{\mathbf{e_2}} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{\mathbf{e_3}}$$

Iremos definir essa expressão como sendo o gradiente de f:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \Gamma(\mathrm{d}f) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{\mathbf{e_1}} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{\mathbf{e_2}} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{\mathbf{e_3}}$$

No caso particular das coordenadas esféricas, $u = r$, $v = \theta$, $w = \varphi$, $\lambda = 1$, $\mu = r$ e $\nu = r\sin(\theta)$, no que leva a

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

Exemplo 3.10 (Divergente)**.** *Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial dado por*

$$\mathbf{F} = F_1\hat{\mathbf{e_1}} + F_2\hat{\mathbf{e_2}} + F_3\hat{\mathbf{e_3}}$$

Aplicando Γ^{-1}, obtemos

$$\Gamma^{-1}(\mathbf{F}) = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3$$

[10] A transformação Γ está completamente determinada, já que $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ e $\mathrm{d}w$ são linearmente independentes (e consequentemente as 1-formas σ_i também são).

Agora aplicando o operador estrela:

$$\begin{aligned} *\Gamma^{-1}(\mathbf{F}) &= F_1\sigma_2\sigma_3 + F_2\sigma_3\sigma_1 + F_3\sigma_1\sigma_2 \\ &= (\mu\nu F_1)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + (\lambda\nu F_2)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u + (\lambda\mu F_3)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

Calculando a derivada exterior dessa 2-forma e sabendo que apenas uma das derivadas parciais deve sobreviver em cada termo, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(*\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) &= \frac{\partial}{\partial u}(\mu\nu F_1)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + \frac{\partial}{\partial v}(\lambda\nu F_2)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial w}(\lambda\mu F_3)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u}(\mu\nu F_1) + \frac{\partial}{\partial v}(\lambda\nu F_2) + \frac{\partial}{\partial w}(\lambda\mu F_3)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\mu\nu F_1) + \frac{\partial}{\partial v}(\lambda\nu F_2) + \frac{\partial}{\partial w}(\lambda\mu F_3)\right)\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

Aplicando novamente o operador estrela, obtemos

$$*\,\mathrm{d}(*\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\mu\nu F_1) + \frac{\partial}{\partial v}(\lambda\nu F_2) + \frac{\partial}{\partial w}(\lambda\mu F_3)\right)$$

Iremos definir essa expressão como sendo o divergente de $\mathbf{F}$*:*

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = *\,\mathrm{d}(*\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\mu\nu F_1) + \frac{\partial}{\partial v}(\lambda\nu F_2) + \frac{\partial}{\partial w}(\lambda\mu F_3)\right)$$

Em coordenadas esféricas, ficamos com

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} &= \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin(\theta)F_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin(\theta)F_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(rF_\varphi)\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)F_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} \end{aligned}$$

Exemplo 3.11 (Rotacional)**.** *Dado o mesmo campo vetorial* $\mathbf{F}$ *do exemplo anterior* (3.10)*, temos que*

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(\mathbf{F}) &= F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 \\ &= \lambda F_1\,\mathrm{d}u + \mu F_2\,\mathrm{d}v + \nu F_3\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Aplicando a derivada exterior, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) = {} & \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial w}(\lambda F_1)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \\ & \frac{\partial}{\partial w}(\mu F_2)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial u}(\nu F_3)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w + \frac{\partial}{\partial v}(\nu F_3)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) = {} & \left(\frac{\partial}{\partial v}(\nu F_3) - \frac{\partial}{\partial w}(\mu F_2)\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + \left(\frac{\partial}{\partial w}(\lambda F_1) - \frac{\partial}{\partial u}(\nu F_3)\right)\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u + \\ & \left(\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

Voltando para as 1-formas σ_i,

$$\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) = \frac{1}{\mu\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial v}(\nu F_3)-\frac{\partial}{\partial w}(\mu F_2)\Big)\sigma_2\sigma_3+\frac{1}{\lambda\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial w}(\lambda F_1)-\frac{\partial}{\partial u}(\nu F_3)\Big)\sigma_3\sigma_1+ \frac{1}{\lambda\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\Big)\sigma_1\sigma_2$$

Usando o operador estrela, temos que

$$*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) = \frac{1}{\mu\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial v}(\nu F_3) - \frac{\partial}{\partial w}(\mu F_2)\Big)\sigma_1 + \frac{1}{\lambda\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial w}(\lambda F_1) - \frac{\partial}{\partial u}(\nu F_3)\Big)\sigma_2+ \frac{1}{\lambda\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\Big)\sigma_3$$

Aplicando Γ nessa expressão, chegamos a

$$\Gamma(*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))) = \frac{1}{\mu\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial v}(\nu F_3)-\frac{\partial}{\partial w}(\mu F_2)\Big)\hat{\mathbf{e_1}}+\frac{1}{\lambda\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial w}(\lambda F_1)-\frac{\partial}{\partial u}(\nu F_3)\Big)\hat{\mathbf{e_2}}+ \frac{1}{\lambda\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\Big)\hat{\mathbf{e_3}}$$

Iremos definir esse resultado como sendo o rotacional de **F***:*

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \Gamma(*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F})))$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \frac{1}{\mu\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial v}(\nu F_3) - \frac{\partial}{\partial w}(\mu F_2)\Big)\hat{\mathbf{e_1}} + \frac{1}{\lambda\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial w}(\lambda F_1) - \frac{\partial}{\partial u}(\nu F_3)\Big)\hat{\mathbf{e_2}}+ \frac{1}{\lambda\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\Big)\hat{\mathbf{e_3}}$$

Em coordenadas esféricas, o rotacional é dado por

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin(\theta)F_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rF_\theta)\Big)\hat{\mathbf{r}}+ \frac{1}{r\sin(\theta)}\Big(\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin(\theta)F_\varphi)\Big)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\Big)\hat{\varphi}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \frac{1}{r\sin(\theta)}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)F_\varphi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\Big)\hat{\mathbf{r}}+ \frac{1}{r}\Big(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\Big)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\Big)\hat{\varphi}$$

Exemplo 3.12 (Laplaciano)**.** *Seja f uma função escalar das coordenadas u, v e w. Vimos no exemplo* (3.9) *que*

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\sigma_1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\sigma_2 + \frac{1}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\sigma_3$$

Aplicando o operador estrela, obtemos

$$\begin{aligned} * \, \mathrm{d}f &= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\sigma_2\sigma_3 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\sigma_3\sigma_1 + \frac{1}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\sigma_1\sigma_2 \\ &= \frac{\nu\mu}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + \frac{\lambda\nu}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u + \frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

Agora usando a derivada exterior, apenas uma derivada parcial deve sobreviver em cada termo, resultando

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(*\,\mathrm{d}f) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\nu\mu}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\nu\mu}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\nu\mu}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

Usando novamente o operador estrela, chegamos à expressão

$$\nabla^2 f = *\,\mathrm{d}(*\,\mathrm{d}f) = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\nu\mu}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

no qual definiremos como laplaciano de f, denotado por $\nabla^2 f$.

Em coordenadas esféricas, o laplaciano é dado por

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{r\sin(\theta)}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{r}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

Em suma, dada uma base ortonormal com orientação positiva $\{\hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_3}}\}$ com coordenadas $\{u, v, w\}$ e de forma que

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma_1\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_2\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_3\hat{\mathbf{e_3}}$$

então podemos definir uma transformação linear Γ tal que

$$\Gamma(\sigma_i) = \hat{\mathbf{e_i}}$$

e portanto, para uma função escalar f e um campo vetorial $\mathbf{F}$ dado por

$$\mathbf{F} = F_1\hat{\mathbf{e_1}} + F_2\hat{\mathbf{e_2}} + F_3\hat{\mathbf{e_3}}$$

segue que

$$\boldsymbol{\nabla} f = \Gamma(\mathrm{d}f) \tag{76}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = *\,\mathrm{d}(*\Gamma^{-1}(\mathbf{F})) \tag{77}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \Gamma\big[\,*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))\big] \tag{78}$$

$$\nabla^2 f = *\,\mathrm{d}(*\,\mathrm{d}f) \tag{79}$$

Se $\sigma_1 = \lambda\, du$, $\sigma_2 = \mu\, dv$, $\sigma_3 = \nu\, dw$, então podemos reescrever essas equações para

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{\mathbf{e_1}} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{\mathbf{e_2}} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{\mathbf{e_3}} \tag{80}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial u}(\mu\nu F_1) + \frac{\partial}{\partial v}(\lambda\nu F_2) + \frac{\partial}{\partial w}(\lambda\mu F_3)\right) \tag{81}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \frac{1}{\mu\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial v}(\nu F_3) - \frac{\partial}{\partial w}(\mu F_2)\Big)\hat{\mathbf{e_1}} + \frac{1}{\lambda\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial w}(\lambda F_1) - \frac{\partial}{\partial u}(\nu F_3)\Big)\hat{\mathbf{e_2}} + \frac{1}{\lambda\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\Big)\hat{\mathbf{e_3}} \tag{82}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\nu\mu}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda\nu}{\mu}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\lambda\mu}{\nu}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right] \tag{83}$$

Uma vez que Γ leva o espaço das 1-formas na base $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ para o espaço $\mathbb{R}^3$, se quisermos encontrar a matriz que representa Γ na base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ basta lembrarmos que $\hat{\mathbf{e_i}} = b_{i1}\hat{\mathbf{i}} + b_{i2}\hat{\mathbf{j}} + b_{i3}\hat{\mathbf{k}}$ e portanto

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ b_{i3} \end{bmatrix}$$

Segue disso que a matriz desconhecida que representa Γ é

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} = B^T$$

que é ortogonal.

As equações do gradiente (76), divergente (77) e laplaciano (79) são automaticamente generalizáveis para n dimensões. Para o gradiente, df retornará uma combinação linear de n 1-formas linearmente independentes, no qual $\Gamma(df)$ será um vetor do $\mathbb{R}^n$. Para o divergente, $*\Gamma^{-1}(\mathbf{F})$ será uma combinação linear de $\binom{n}{n-1}$ (n-1)-formas, no que $d(*\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))$ será uma n-forma e portanto $*\, d(*\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))$ será um escalar. Idem para o laplaciano.

Já para o rotacional $d(\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))$ deve retornar uma combinação de linear de $\binom{n}{2}$ 2-formas linearmente independentes, no que $*\, d(\Gamma^{-1}(\mathbf{F}))$ será uma combinação de $\binom{n}{n-2}$ (n-2)-formas. Como só definimos Γ para agir em 1-formas σ_i, Γ em geral não estará definido para agir em (n-2)-formas, necessitando generalização. Se definirmos Γ para agir usando a equação

$$\Gamma(\sigma_i\sigma_j\ldots\sigma_m) = \hat{\mathbf{e_i}} \wedge \hat{\mathbf{e_j}} \wedge \ldots \wedge \hat{\mathbf{e_m}}$$

então $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$ será um (n-2)-vetor.

Naturalmente há outras operações disponíveis, como por exemplo $\Gamma(*\,\mathrm{d}(*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}\mathbf{F})))$ retornará um campo vetorial do $\mathbb{R}^n$ se $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n$. Já se $n = 2$, então $*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}\mathbf{F})$ será um escalar:

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}(\mathbf{F}) &= F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 \\ &= \lambda F_1\,\mathrm{d}u + \mu F_2\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Gamma^{-1}\mathbf{F}) &= \left[\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{\lambda\mu}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\right]\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

e portanto

$$*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}\mathbf{F}) = \frac{1}{\lambda\mu}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\right]$$

Em coordenadas polares, podemos ver que $\sigma_1 = \mathrm{d}r$, $\sigma_2 = r\,\mathrm{d}\theta$. Logo fazendo $u = r$ e $v = \theta$ então obteremos $\lambda = 1$, $\mu = r$ e

$$*\,\mathrm{d}(\Gamma^{-1}\mathbf{F}) = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]$$

Essa expressão é exatamente $(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})_z$ em coordenadas cilíndricas no $\mathbb{R}^3$.

3.8 Superfícies

Agora iremos fixar a coordenada correspondente ao versor $\hat{\mathbf{e_3}}$, no que resulta em um subdomínio do $\mathbb{R}^3$ dada por uma superfície, na qual designaremos de Σ. Sabendo que $\mathrm{d}\mathbf{r}$ está dentro do plano tangente gerado por $\hat{\mathbf{e_1}}$ e $\hat{\mathbf{e_2}}$, então $\mathrm{d}\mathbf{r}$ não tem componente na direção $\hat{\mathbf{e_3}}$ e consequentemente $\sigma_3 = 0$. De $\mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma\mathbf{e}$ temos

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma_1\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_2\hat{\mathbf{e_2}} \tag{84}$$

Uma vez que as coordenadas são ortogonais, segue que $\hat{\mathbf{e_3}}$ será normal a toda a superfície Σ. Conforme $\mathbf{r}$ se move em Σ, o versor $\hat{\mathbf{e_3}}$ acompanhará a superfície. O conjunto dos versores normais à superfície Σ forma uma imagem com um formato esférico, denominado de imagem esférica de Σ. Por exemplo, na superfície cilíndrica paralela ao eixo z o versor $\hat{\rho}$ gerará uma circunferência no plano xy.

Sabendo que a matriz Ω, relacionada à variação dos eixos $\hat{\mathbf{e_i}}$ em Σ é antisimétrica,

$$\Omega^T = -\Omega$$

então podemos escrever essa matriz na forma

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Da equação $d\mathbf{e} = \Omega\mathbf{e}$ vamos obter

$$\begin{bmatrix} d\hat{\mathbf{e_1}} \\ d\hat{\mathbf{e_2}} \\ d\hat{\mathbf{e_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e_1}} \\ \hat{\mathbf{e_2}} \\ \hat{\mathbf{e_3}} \end{bmatrix}$$

que nos fornece as equações

$$d\hat{\mathbf{e_1}} = \omega_3\hat{\mathbf{e_2}} - \omega_1\hat{\mathbf{e_3}} \tag{85}$$

$$d\hat{\mathbf{e_2}} = -\omega_3\hat{\mathbf{e_1}} - \omega_2\hat{\mathbf{e_3}} \tag{86}$$

$$d\hat{\mathbf{e_3}} = \omega_1\hat{\mathbf{e_1}} + \omega_2\hat{\mathbf{e_2}} \tag{87}$$

Já da relação $d\Omega = \Omega^2$, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & d\omega_3 & -d\omega_1 \\ -d\omega_3 & 0 & -d\omega_2 \\ d\omega_1 & d\omega_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\omega_3\omega_3 - \omega_1\omega_1 & -\omega_1\omega_2 & -\omega_3\omega_2 \\ -\omega_2\omega_1 & -\omega_3\omega_3 - \omega_2\omega_2 & \omega_3\omega_1 \\ -\omega_2\omega_3 & \omega_1\omega_3 & -\omega_1\omega_1 - \omega_2\omega_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1\omega_2 & -\omega_3\omega_2 \\ -\omega_2\omega_1 & 0 & \omega_3\omega_1 \\ -\omega_2\omega_3 & \omega_1\omega_3 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$d\omega_1 = -\omega_2\omega_3 \tag{88}$$

$$d\omega_2 = \omega_1\omega_3 \tag{89}$$

$$d\omega_3 = -\omega_1\omega_2 \tag{90}$$

E quanto a $d\sigma = \sigma\Omega$,

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 & d\sigma_2 & d0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sigma_2\omega_3 & \sigma_1\omega_3 & -\sigma_1\omega_1 - \sigma_2\omega_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_3\sigma_2 & -\omega_3\sigma_1 & \omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2 \end{bmatrix}$$

e então

$$d\sigma_1 = \omega_3\sigma_2 \tag{91}$$

$$d\sigma_2 = -\omega_3\sigma_1 \tag{92}$$

$$0 = \omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2 \tag{93}$$

As equações (84) a (93) fornecem várias informações sobre a superfície Σ, tais como a sua curvatura, elemento de área, entre outras.

Uma vez que $\sigma_1\sigma_2$ é uma base das 2-formas em Σ, podemos escrever $\omega_1\omega_2$ em termos dessa base:

$$\omega_1\omega_2 = K\sigma_1\sigma_2 \tag{94}$$

A função K é denominada de curvatura gaussiana de um determinado ponto na superfície Σ. Essa quantidade está relacionada à curvatura intrínseca de Σ, ou seja, referente às medidas feitas dentro e ao longo dessa superfície, sem levar em conta o espaço onde Σ reside (que é o espaço $\mathbb{R}^3$). Por exemplo, quando $K \neq 0$ numa região da superfície, podemos nos deparar com uma circunferência de raio R dentro dessa região que pode ter uma circunferência e área diferentes de $2\pi R$ e πR^2 respectivamente quando medidos dentro da própria superfície.

Já a 2-forma $\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1$ também pode ser escrita na base $\sigma_1\sigma_2$,

$$\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1 = 2H\sigma_1\sigma_2 \tag{95}$$

onde a função H é denominado de curvatura média de um ponto em Σ. Ela está relacionada à curvatura extrínseca, isto é, associada a como Σ está imersa no espaço onde reside.

Analogamente, dado que $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é uma base das 1-formas em Σ, podemos escrever ω_1 e ω_2 como combinações lineares de σ_1 e σ_2:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p\sigma_1 + q\sigma_2 \\ \omega_2 &= r\sigma_1 + s\sigma_2 \end{aligned}$$

onde p, q, r e s são funções em Σ. Mas devido à equação (93),

$$0 = \omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2$$

temos que

$$\begin{aligned} 0 &= (p\sigma_1 + q\sigma_2)\sigma_1 + (r\sigma_1 + s\sigma_2)\sigma_2 \\ &= (-q + r)\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

Como $\sigma_1\sigma_2$ é uma base das 2-formas em Σ, $\sigma_1\sigma_2 \neq 0$ e portanto $r = q$. Logo

$$\omega_1 = p\sigma_1 + q\sigma_2 \tag{96}$$

$$\omega_2 = q\sigma_1 + s\sigma_2 \tag{97}$$

Substituindo essas equações em (94), vamos obter

$$\begin{aligned} K\sigma_1\sigma_2 &= (p\sigma_1 + q\sigma_2)(q\sigma_1 + s\sigma_2) \\ &= (ps - q^2)\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

e consequentemente

$$K = ps - q^2 \tag{98}$$

Agora substituindo ω_1 e ω_2 em (95), temos

$$\begin{aligned} 2H\sigma_1\sigma_2 &= \sigma_1(q\sigma_1 + s\sigma_2) - \sigma_2(p\sigma_1 + q\sigma_2) \\ &= (s + p)\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

e então

$$2H = p + s \tag{99}$$

Agora note que as equações (96) e (97) podem ser escritas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz 2×2 satisfazem

$$\begin{vmatrix} p - \mu & q \\ q & s - \mu \end{vmatrix} = 0 \tag{100}$$

na qual chegamos na equação do segundo grau

$$\mu^2 - (p + s)\mu + ps - q^2 = 0$$

As fórmulas de Viète afirmam que as duas soluções μ_1 e μ_2 dessa equação satisfazem

$$\mu_1 + \mu_2 = -\frac{-(p + s)}{1} = p + s$$

e

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{ps - q^2}{1} = ps - q^2$$

Comparando esses resultados com (98) e (99), concluímos que

$$K = \mu_1 \cdot \mu_2 \quad \text{e} \quad 2H = \mu_1 + \mu_2$$

Os autovalores μ_1 e μ_2 são denominados de curvaturas principais de Σ.

Para encontrarmos ω_3, usamos uma das equações (91) e (92),

$$\mathrm{d}\sigma_1 = \omega_3\sigma_2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}\sigma_2 = -\omega_3\sigma_1$$

E da equação (90), temos

$$\mathrm{d}\omega_3 = -\omega_1\omega_2 = -K\sigma_1\sigma_2$$

Isso significa que basta sabermos σ_1 e σ_2 que já temos condições de encontrar a curvatura gaussiana K da superfície Σ.

Exemplo 3.13. *Seja a curva no plano xy dada por*

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \cos(\theta) + \ln(\tan(\theta/2)) \\ y(\theta) &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

onde $\pi/2 < \theta < \pi$. A revolução dessa curva em torno do eixo x gera uma superfície Σ, na qual pode ser vista na figura 2.
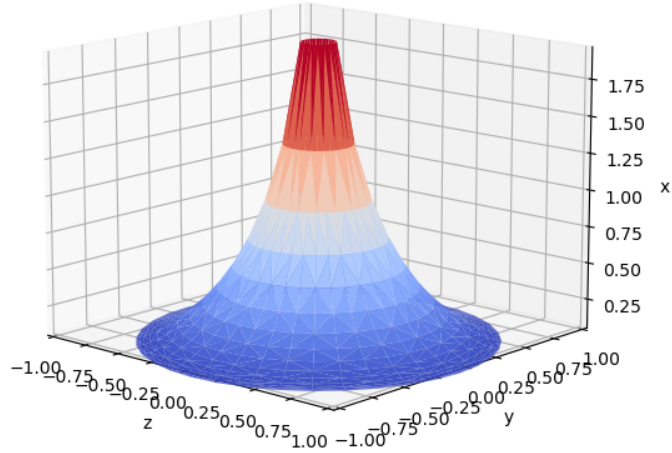
Figura 2: Superfície Σ no intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$.

A parametrização dessa revolução pode ser dada pelo ângulo φ em relação ao eixo y e introduz uma nova coordenada z. Então $z = y\sin(\varphi) = \sin(\theta)\sin(\varphi)$ e deve aparecer um fator $\cos(\varphi)$ em y A superfície Σ, portanto, é dada por

$$\begin{aligned}
x(\theta,\varphi) &= \cos(\theta) + \ln(\tan(\theta/2)) \\
y(\theta,\varphi) &= \sin(\theta)\cos(\varphi) \\
z(\theta,\varphi) &= \sin(\theta)\sin(\varphi)
\end{aligned}$$

onde $\pi/2 < \theta < \pi$ e $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Conforme vimos na seção anterior, podemos encontrar σ_1 e σ_2 referentes a θ e φ usando as equações

$$\sigma_1 = \lambda\, \mathrm{d}\theta \qquad e \qquad \sigma_2 = \mu\, \mathrm{d}\varphi$$

onde

$$\lambda = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| \qquad e \qquad \mu = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right|$$

$$\mathbf{r} = x(\theta,\varphi)\hat{\mathbf{i}} + y(\theta,\varphi)\hat{\mathbf{j}} + z(\theta,\varphi)\hat{\mathbf{k}}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \left(-\sin(\theta) + \frac{1}{2}\sec^2(\theta/2)\cot(\theta/2)\right)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}} + \sin(\varphi)\cos(\theta)\hat{\mathbf{k}} \\
&= \cos(\theta)\cot(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\cos(\theta)\hat{\mathbf{j}} + \sin(\varphi)\cos(\theta)\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda(\theta,\varphi) &= \sqrt{\cos^2(\theta)\cot^2(\theta)+\cos^2(\theta)(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta)\cot^2(\theta)+\cos^2(\theta)} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta)(\cot^2(\theta)+1)} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta)\csc^2(\theta)} \\
&= \cot(\theta)
\end{aligned}
$$

E para a coordenada φ*,*

$$
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{\mathbf{j}} + \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{\mathbf{k}}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu(\theta,\varphi) &= \sqrt{\sin^2(\theta)(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi))} \\
&= \sin(\theta)
\end{aligned}
$$

Logo temos

$$
\sigma_1 = \cot(\theta)\,\mathrm{d}\theta \quad e \quad \sigma_2 = \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi
$$

Sabendo que $\mathrm{d}\sigma_2 = -\omega_3\sigma_1$*, podemos encontrar*[11] ω_3*:*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_2 &= \mathrm{d}(\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi) \\
-\omega_3\sigma_1 &= \mathrm{d}(\sin(\theta))\,\mathrm{d}\varphi \\
-\omega_3\cot(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

e então $\omega_3 = \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi$*. Portanto*

$$
\begin{aligned}
K\sigma_1\sigma_2 &= -\,\mathrm{d}\omega_3 \\
K\cot(\theta)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi &= -\,\mathrm{d}(\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi) \\
K\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi &= -\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

Segue disso que a curvatura gaussiana da superfície Σ *é* $K = -1$*.*

Exemplo 3.14. *No exemplo* (3.6) *vimos que um toro tem parametrização dada por*

$$
\begin{aligned}
x &= d\cos(\varphi) + r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\
y &= d\sin(\varphi) + r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\
z &= r\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

onde r *é o raio do tubo e* d *é a distância entre o centro do tubo e a origem. A variação do vetor posição* $\mathbf{r}$ *em relação a* θ *é dada por*

$$
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{\mathbf{i}} - r\sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{\mathbf{j}} + r\cos(\theta)\hat{\mathbf{k}} \tag{101}
$$

[11] Poderíamos usar $\mathrm{d}\sigma_1 = \omega_3\sigma_2$, mas a única informação que obteríamos é que ou $\omega_3 = 0$ ou ω_3 é proporcional a $\mathrm{d}\varphi$, já que $\mathrm{d}\sigma_1 = \mathrm{d}(\cot(\theta)\,\mathrm{d}\theta) = 0$.

Podemos verificar que

$$\lambda = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = r$$

Também iremos encontrar que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-d\sin(\varphi) - r\cos(\theta)\sin(\varphi))\,\hat{\mathbf{i}} + (d\cos(\varphi) + r\cos(\theta)\cos(\varphi))\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (102)$$

$$\mu = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right| = d + r\cos(\theta)$$

e portanto

$$\sigma_1 = r\,\mathrm{d}\theta \quad \textit{e} \quad \sigma_2 = (d + r\cos(\theta))\,\mathrm{d}\varphi$$

Sabendo que $\mathrm{d}\sigma_1 = 0$*, usaremos a equação* $\mathrm{d}\sigma_2 = -\omega_3\sigma_1$*:*

$$-r\omega_3\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}((d + r\cos(\theta))\,\mathrm{d}\varphi)$$
$$-r\omega_3\,\mathrm{d}\theta = -r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Segue disso que $\omega_3 = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi$*. Sabendo que* $K\sigma_1\sigma_2 = -\,\mathrm{d}\omega_3$*,*

$$\begin{aligned} K \cdot r(d + r\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi &= -\,\mathrm{d}(-\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi) \\ &= \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Logo

$$K \cdot r(d + r\cos(\theta)) = \cos(\theta)$$
$$K(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{rd + r^2\cos(\theta)} \qquad (103)$$

Lembrando que θ *é o ângulo entre a projeção do ponto em* Σ *e o plano* xy *(no sentido de fora para dentro do toro), temos que* $K > 0$ *quando* $-\pi/2 < \theta < \pi/2$*,* $K < 0$ *quando* $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ *e* $K = 0$ *quando* $\theta = \pm\pi/2$*. Ou seja, a curvatura gaussiana do toro é negativa na parte interna, é positiva na parte externa e é zero nos pontos intermediários.*

No exemplo (2.1) vimos que o produto vetorial entre dois vetores ordinários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ do $\mathbb{R}^3$ pode ser dado por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = *(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$$

De maneira semelhante, o produto vetorial entre vetores cujas componentes são p-formas é dado por

$$\mathrm{d}\mathbf{u} \times \mathrm{d}\mathbf{v} = *(\mathrm{d}\mathbf{u} \wedge \mathrm{d}\mathbf{v})$$

onde o operador estrela $*$ e o produto exterior $\wedge$ dessa equação age apenas nos versores $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}}$, enquanto que a multiplicação entre as componentes é o produto exterior entre p-formas.

O produto vetorial de d$\mathbf{r}$ com ele próprio é

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r} &= *\big[\,(\sigma_1\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_2\hat{\mathbf{e_2}}) \wedge (\sigma_1\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_2\hat{\mathbf{e_2}})\,\big] \\
&= *\big[\sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_1}}\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_2\sigma_1\hat{\mathbf{e_2}}\hat{\mathbf{e_1}}\big] \\
&= *\big[\sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_1}}\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_1}}\hat{\mathbf{e_2}}\big] \\
&= *\big[2\sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_1}}\hat{\mathbf{e_2}}\big] \\
&= 2\sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_3}}
\end{aligned}$$

A 2-forma $\sigma_1\sigma_2$ é o elemento de área de Σ, da mesma forma que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ era o elemento de volume no $\mathbb{R}^3$. Já o elemento $\sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_3}}$ é o vetor de área de Σ, que é o elemento d$\mathbf{a}$ que aparece nas integrais de superfície. Por exemplo, em coordenadas esféricas com $r = R$ constante, temos

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \sigma_\theta\sigma_\varphi\hat{\mathbf{r}} = R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\hat{\mathbf{r}}$$

Note também que o produto vetorial de um elemento com ele próprio só é zero quando a multiplicação das componentes comuta, o que não é o desse caso.

De maneira semelhante, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathrm{d}\hat{\mathbf{e_3}} &= *\big[\,(\sigma_1\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_2\hat{\mathbf{e_2}}) \wedge (\omega_1\hat{\mathbf{e_1}} + \omega_2\hat{\mathbf{e_2}})\,\big] \\
&= (\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1)\hat{\mathbf{e_3}} \\
&= 2H\hat{\mathbf{e_3}}
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{\mathbf{e_3}} \times \mathrm{d}\hat{\mathbf{e_3}} &= *\big[\,(\omega_1\hat{\mathbf{e_1}} + \omega_2\hat{\mathbf{e_2}}) \wedge (\omega_1\hat{\mathbf{e_1}} + \omega_2\hat{\mathbf{e_2}})\,\big] \\
&= 2\omega_1\omega_2\hat{\mathbf{e_3}} \\
&= 2K\hat{\mathbf{e_3}}
\end{aligned}$$

Agora seja f uma função bem comportada definida em uma superfície Σ. Podemos construir uma generalização do operador laplaciano que esteja restrito em Σ, isto é, apenas os pontos de Σ são avaliados na variação de f. Esse operador recebe o nome de operador de Laplace-Beltrami, denotado por Δf. Ele é definido da mesma maneira que o laplaciano,

$$\Delta f = *(\mathrm{d} * \mathrm{d}f)$$

mas com a diferença de que df agora é função apenas de σ_1 e σ_2:

$$\mathrm{d}f = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2$$

E então

$$\begin{aligned}
*\,\mathrm{d}f &= c_1\sigma_2 - c_2\sigma_1 \\
\mathrm{d} * \mathrm{d}f &= \mathrm{d}(c_1\sigma_2 - c_2\sigma_1)
\end{aligned}$$

A última equação pode ser expressa em termos da base $\sigma_1\sigma_2$, onde o fator multiplicativo é justamente Δf:

$$\mathrm{d} * \mathrm{d}f = (\Delta f)\sigma_1\sigma_2$$

4 Formas diferenciais e integração

4.1 Variedades

Seja o toro dado por

$$
\begin{aligned}
x &= d\cos(\varphi) + r\cos(\theta)\cos(\varphi)\\
y &= d\sin(\varphi) + r\cos(\theta)\sin(\varphi)\\
z &= r\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

onde d e r são constantes positivas tais que $d > r$. A coordenada θ é o ângulo entre o ponto (x, y, z) e a sua projeção no plano xy, orientado de fora para dentro do toro pelo lado superior. Já φ é o ângulo azimutal de (x, y, z) em relação ao eixo x. Iremos denotar M como o subconjunto do $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos que constituem o toro. Agora seja W o subconjunto do $\mathbb{R}^2$ dado por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d - r \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant d + r\}$. Em coordenadas polares, W pode ser descrito por (s, β), onde $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = s\cos(\beta)$ e $y = s\sin(\beta)$. Vendo o toro de cima, podemos associar cada ponto de W a um ponto da parte superior do toro (incluindo os equadores interno e externo) usando a projeção dessa superfície no plano xy. Denotaremos essa parte superior de U, que é o subconjunto de M com $z \geqslant 0$. Essa associação cria um mapa que chamaremos de ϕ_{up} e pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
&\phi_{up}:\ W \mapsto U,\\
&\phi_{up}(s, \beta) = (x(\theta^{\uparrow}(s, \beta), \varphi^{\uparrow}(s, \beta)),\ y(\theta^{\uparrow}(s, \beta), \varphi^{\uparrow}(s, \beta)),\ z(\theta^{\uparrow}(s, \beta), \varphi^{\uparrow}(s, \beta)))
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\theta^{\uparrow}(s, \beta) &= \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{d - s}{r}\right)\\
\varphi^{\uparrow}(s, \beta) &= \beta
\end{aligned}
$$

com $d - r \leqslant s \leqslant d + r$ e $-\pi < \beta \leqslant \pi$. O toro e sua projeção pode ser vista na figura 3.

Da mesma forma, podemos criar um outro mapa ϕ_{down} que associa os pontos inferiores[12] do toro V com o mesmo conjunto U, mas agora com

$$
\begin{aligned}
\theta^{\downarrow}(s, \beta) &= \pi + \arccos\left(\frac{d - s}{r}\right)\\
\varphi^{\downarrow}(s, \beta) &= \beta
\end{aligned}
$$

A união dos mapas ϕ_{up} e ϕ_{down} cobrem toda a superfície do toro e portanto formam um *atlas* dele, isto é, os dois mapas são suficientes para descrever qualquer ponto do toro. Os equadores interno e externo são comuns aos dois mapas, e como ambos usam o mesmo conjunto W, a correspondência de um para um dos pontos nesses equadores é trivial.

[12] Note que $U \cup V = M$.
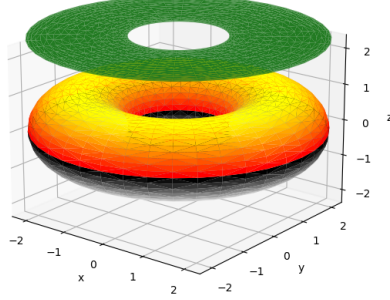
Figura 3: Toro com $d = 2$ e $r = 1$. A parte superior (domínio U) está colorida de vermelho e amarelo enquanto que a parte inferior (domínio V) está colorido de cinza. Em cima do toro, colorido de verde, está a projeção da parte inferior ou superior do toro no plano xy, que é o subconjunto W.

Os mapas ϕ_{up} e ϕ_{down} também admitem inversa. No caso $\phi_{up}^{-1} : U \mapsto W$ e $\phi_{down}^{-1} : V \mapsto W$ são dados por

$$\phi_{up}^{-1}(x, y, z) = (x, y) \qquad (x, y, z) \in V^+$$
$$\phi_{down}^{-1}(x, y, z) = (x, y) \qquad (x, y, z) \in V^-$$

em coordenadas cartesianas.

O fato de conseguirmos determinar relações unívocas entre quaisquer pontos de uma sub-região do toro (U ou V) com um subconjunto de um espaço euclidiano $W \subseteq \mathbb{R}^2$ usando funções bijetoras contínuas ϕ_{up} e ϕ_{down} com inversas ϕ_{up}^{-1} e ϕ_{down}^{-1} também contínuas mostra que estabelecemos um *homeomorfismo* entre os dois conjuntos (W com U ou também W com V).

Agora seja um ponto p qualquer do toro, isto é, $p \in M$. Se U for um subconjunto aberto de M que inclua p, então dizemos que U é uma vizinhança de p. Se a vizinhança U de p for conexa e pequena o suficiente, podemos estabelecer um homeomorfismo entre U e um subconjunto de um espaço euclidiano, que no caso é o $\mathbb{R}^2$. Para os pontos fora dos equadores, isso pode ser feito usando os mapas descritos anteriormente. Agora note que nenhum dos dois mapas, ϕ_{up} e ϕ_{down} vão sozinhos cobrir completamente uma vizinhança conexa U_0 de um ponto que fica em um dos equadores. Porém nesse caso podemos sempre criar um novo mapa que é a projeção lateral da superfície no qual o equador se encontra, de forma que possa cobrir toda a vizinhança U_0 e estabelecer um outro homeomorfismo com um subconjunto do $\mathbb{R}^2$, que seria o plano yz ou xz. Isso significa que todos os pontos do toro possuem alguma vizinhança tal que é homeomórfica com algum subconjunto aberto[13] de um espaço euclidiano.

[13]Com a adição dos mapas laterais para cada equador, podemos restringir W de forma que não cubra os equadores ($d - r < s < d + r$) e assim W seja um conjunto aberto do $\mathbb{R}^2$.

Essa característica não é única dos toros, pois outros espaços topológicos tais como superfícies esféricas, retângulos, discos e curvas parametrizadas que não se cruzam do tipo $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ com $x_i(t)$ contínuas também possuem a propriedade de que todos os pontos que os compõe possuem uma vizinhança que é homeomórfica com algum subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Isso nos motiva à seguinte definição:

Definição 4.1 (Variedades)**.** *Um espaço topológico M é denominado de variedade se todos os pontos que o compõe possuem uma vizinhança que é homeomorfa a um subconjunto aberto de um espaço euclidiano.*

Se em um determinado ponto $p \in M$ a menor dimensão do espaço euclidiano tal que é homeomórfica à sua vizinhança é n, então dizemos que a variedade M tem dimensão local n no ponto p. Se todos os pontos de M tiverem a mesma dimensão local n, então denominamos M de variedade n-dimensional, ou de variedade de dimensão n.

Dada uma variedade de dimensão n, uma vez que cada ponto possui alguma vizinhança homeomórfica ao $\mathbb{R}^n$, segue que são necessários n parâmetros para localizar esse ponto nessa vizinhança.

O toro M descrito anteriormente é uma variedade de dimensão dois porque qualquer homeomorfismo de um espaço euclidiano com uma vizinhança de qualquer um dos pontos necessita que esse espaço seja pelo menos o $\mathbb{R}^2$, não sendo possível cobrir uma vizinhança usando apenas a reta real $\mathbb{R}$ ou apenas por um ponto (dimensão zero).

4.1.1 Diferenciabilidade

Dada M uma variedade de dimensão n, a junção dos mapas que fazem homeomorfismo com $\mathbb{R}^n$ e que conjuntamente cobrem todos os pontos formam um atlas de M. Sejam U e V subconjuntos abertos de M que possuem pontos em comum (isto é, $U \cap V \neq \varnothing$). Segue que dois mapas homeomórficos $\phi : U \mapsto \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \mapsto \mathbb{R}^n$ pertencentes a esse atlas possuem um domínio em comum, que é $U \cap V$. Uma ilustração disso é mostrado na figura 4. Os mapas também são denotados por (U, ϕ) e (V, ψ).
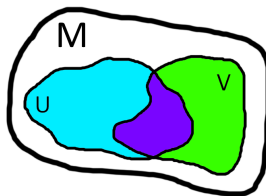
Figura 4: Dois subconjuntos U e V da variedade M possuem uma região em comum $U \cap V$ representado pela cor violeta.

Um exemplo é o caso do toro, em que U pode ser a parte superior do toro (não incluindo os equadores) e V uma lateral da superfície externa (excluindo

os pontos em que $z = \pm r$). Evidentemente há uma região em comum entre U e V que são os pontos dessa lateral com $z \in (0, r)$. E então ϕ leva os pontos superiores do toro à projeção xy enquanto que ψ leva os pontos da lateral externa à projeção xz ou yz, se essa lateral for paralela a um dos eixos x ou y respectivamente. A região $U \cap V$ é ilustrada na figura 5.
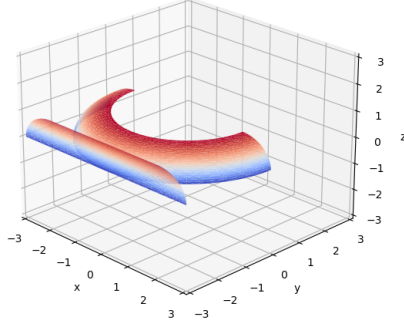
Figura 5: Região do toro no qual $U \cap V$. O subconjunto do $\mathbb{R}^2$ no qual é homeomórfico no domínio $U \cap V$ aparece ao lado esquerdo.

Qualquer ponto na região em comum $U \cap V$ pode ser aplicado tanto por ϕ quanto por ψ. De uma outra perspectiva, esses pontos podem ser uma ponte intermediária entre a imagem de ϕ e de ψ. No caso ϕ^{-1} leva a imagem de ϕ dessa região até um ponto em $U \cap V$ e então aplicamos ψ para levar esse ponto até a imagem de ψ. Essa passagem é representada pela composta $\psi \circ \phi^{-1}$: $\phi(U \cap V) \mapsto \psi(U \cap V)$. Como ϕ e ψ^{-1} são homeomorfismos, $\psi \circ \phi^{-1}$ também é. A função $\psi \circ \phi^{-1}$ é denominada de *mapa de transição*.

Agora seja $f : M \mapsto \mathbb{R}$ uma função real sobre a variedade M. Podemos levar a imagem $\phi(U \cap V)$ até $U \cap V$ usando ϕ^{-1} e então aplicar f, no que resulta na composta $f \circ \phi^{-1}$. Analogamente podemos construir $f \circ \psi^{-1}$. Se M for uma variedade de dimensão n, então as imagens $\phi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ podem ser descritas usando n parâmetros, chamados de coordenadas locais. Iremos denotar as coordenadas em $\phi(U \cap V)$ de x^i e as coordenadas de $\psi(U \cap V)$ de y^j. Com base no mapa de transição $\psi \circ \phi^{-1}$, há uma relação entre essas coordenadas locais, no qual pode ser expressa por

$$x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n) \quad \text{e} \quad y^j = y^j(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

Disso pode surgir a necessidade de saber como que f se comporta em relação às coordenadas locais, e isso envolve derivadas de f em x^i e em y^j. Se $f \circ \phi^{-1}$ e $f \circ \psi^{-1}$ forem diferenciáveis pelo menos até primeira ordem, isso é possível. Mas mesmo assim, isso não garante que possa existir uma regra da cadeia entre x^i e y^j. Usando as propriedades de composição podemos escrever $f \circ \phi^{-1}$ na forma

$$f \circ \phi^{-1} = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1})$$

Então usar a regra da cadeia na derivada de $f \circ \phi^{-1}$ em x^i requer que o mapa de transição $\psi \circ \phi^{-1}$ seja diferenciável. Por exemplo, se isso for verdade até à primeira ordem, então as derivadas parciais $\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}$ e $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$ existem e a regra da cadeia (de primeira ordem) também.

Com base nisso, introduzimos o conceito de *atlas diferenciável* de M, no qual é um atlas de M composto por mapas tais que as transições entre eles sejam todos diferenciáveis (se tal atlas existir). Isso significa que se f for diferenciável nas coordenadas x^i em $U \cap V$, então pela regra da cadeia f também será diferenciável em y^j na região $U \cap V$.

Agora suponha que uma variedade M de dimensão n suporte um atlas diferenciável. Podemos adicionar um novo mapa (U_0, ϕ_0) a ele. Se o novo atlas com esse mapa continua sendo um atlas diferenciável (isto é, as transições dos mapas já existentes com (U_0, ϕ_0) são diferenciáveis), então dizemos que o mapa (U_0, ϕ_0) é *diferencialmente compatível* com tal atlas. O conjunto de todos os mapas de M diferencialmente compatíveis formam um *atlas máximo* de M.

De agora em diante iremos trabalhar apenas em variedades que admitem um atlas máximo, o que nos motiva à seguinte definição:

Definição 4.2 (Variedade diferenciável)**.** *Uma variedade diferenciável é uma variedade dotada de um atlas máximo.*

Uma função $f : M \mapsto \mathbb{R}$ é dita ser diferenciável em um ponto p de uma variedade diferenciável M se as derivadas de $f \circ \phi^{-1}$ existirem para qualquer mapa ϕ do atlas máximo que cubra o ponto p. Uma função é dita suave se ela é diferenciável até a ordem que precisarmos.

4.1.2 Orientabilidade

Seja M uma variedade diferenciável e (U, ϕ) um mapa do atlas máximo com coordenadas x^i. Dado que as coordenadas x^i são independentes entre si, segue que

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta^i_k$$

Usando a regra da cadeia, temos

$$\sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \delta^i_k$$

Fazendo $a_{ij} = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$ e $b_{jk} = \dfrac{\partial y^j}{\partial x^k}$, obtemos uma equação matricial

$$\sum_j a_{ij} b_{jk} = \delta^i_k$$

ou então $AB = I$, onde $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{jk}]$. Isso significa que $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(I) = 1$, ou seja, $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$. Mas A e B são

justamente as matrizes jacobianas

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

Segue disso que a independência entre as coordenadas locais dos mapas garante um jacobiano $\dfrac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(y^1,\ldots,y^n)} = \det(A)$ não-nulo entre as coordenadas de dois mapas. Como os mapas de transição são diferenciáveis pelo menos até primeira ordem, então o jacobiano é uma função contínua que não tem raízes. Pelo teorema do valor intermediário, não é possível que o jacobiano troque de sinal, já que se isso acontecesse, teria que se anular em algum ponto. Portanto o jacobiano ou é sempre positivo ou sempre negativo.

Sabemos que o determinante muda de sinal ao trocar uma coluna pela outra, então a ordem das coordenadas é importante. Quando o jacobiano é positivo, dizemos que o mapa de transição preserva a orientação. Uma variedade dimensional é dita *orientável* quando admite um atlas composto de mapas de transição que preservam a orientação, também chamado de atlas orientado.

Exemplo 4.1 (Circunferência)**.** *Seja M o subconjunto do $\mathbb{R}^2$ constituído pelos pontos (x,y) que satisfazem $x^2+y^2=a^2$. Esse conjunto forma uma circunferência de raio a centrado na origem. Agora iremos criar um mapa $\phi_{up} : U \mapsto (-a,a)$, onde U é o subconjunto de M cujos elementos satisfazem $y>0$. Definiremos ϕ_{up} por*

$$\phi_{up}(x,y) = x \qquad (y>0)$$

e que cuja inversa ϕ_{up}^{-1} é dada por

$$\phi_{up}^{-1}(x) = (x, \sqrt{a^2-x^2})$$

Como ϕ_{up} é bijetora, é contínua e tem inversa contínua, então ϕ_{up} forma um homeomorfismo entre U e um subconjunto aberto dos reais $\mathbb{R}$.

De maneira totalmente análoga, definiremos outros três mapas, ϕ_{right}, ϕ_{down} e ϕ_{left}

$$\begin{aligned} \phi_{right}(x,y) &= y \qquad (x>0) \\ \phi_{down}(x,y) &= x \qquad (y<0) \\ \phi_{left}(x,y) &= y \qquad (x<0) \end{aligned}$$

com inversas dadas por

$$\begin{aligned} \phi_{right}^{-1}(y) &= (\sqrt{a^2-y^2}, y) \\ \phi_{down}^{-1}(x) &= (x, -\sqrt{a^2-x^2}) \\ \phi_{left}^{-1}(y) &= (-\sqrt{a^2-y^2}, y) \end{aligned}$$

Esses quatro mapas cobrem todo o conjunto M e portanto formam um atlas de M. E como todos são homeomórficos com algum subconjunto de $\mathbb{R}$, segue que M é uma variedade de dimensão 1.

Os mapas de transição são quatro e cada um corresponde a um quadrante do plano $\mathbb{R}^2$. Por exemplo $\phi_{up} \circ \phi_{right}^{-1}$ é dado por

$$\phi_{up} \circ \phi_{right}^{-1}(y) = \phi_{up}(\sqrt{a^2 - y^2}, y) = \sqrt{a^2 - y^2}$$

Agora percebemos que o jacobiano

$$\frac{d}{dy}\phi_{up} \circ \phi_{right}^{-1}(y) = \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

é negativo para todo y na região de interseção $y \in (0, a)$. Como a circunferência possui dimensão 1, não temos o luxo de trocar coordenadas de posição, já que só existe uma. Isso significa que esse atlas não pode ser orientado, mas não implica que a circunferência seja não-orientável. Ao invés disso, iremos escolher novos mapas ϕ_- e ϕ_+ dados por

$$\phi_-(x, y) = \frac{y}{a + x} \quad e \quad \phi_+(x, y) = -\frac{y}{a - x}$$

Denotando s a coordenada local da imagem de ϕ_- e t a coordenada relacionada a ϕ_+, temos

$$s = \frac{y}{a + x} \quad e \quad t = -\frac{y}{a - x} \tag{104}$$

O significado de s é a inclinação da reta (em relação ao eixo x) que passa pelo ponto $(-a, 0)$ e em $(x, y) \in M$, como pode ser visto na figura 6. Já t
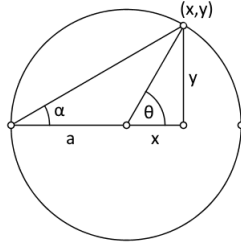
Figura 6: O parâmetro s é a tangente do ângulo α.

é a inclinação da reta (em relação ao eixo x) que passa em $(a, 0)$ e em (x, y). Podemos observar que ϕ_- cobre todos os pontos da circunferência exceto $(-a, 0)$ de maneira unívoca, enquanto que ϕ_+ faz o mesmo exceto em $(a, 0)$. Então ambos formam um atlas da circunferência. Em seus respectivos domínios, vemos que ambos os mapas são contínuos. Ambos s e t podem assumir quaisquer valores reais. O domínio em comum entre ϕ_- e ϕ_+ são todos os pontos da circunferência exceto $(-a, 0)$ e $(a, 0)$.

Usando o fato de que $x^2 + y^2 = a^2$ *e usando a primeira expressão de* (104)*, chegamos na equação*

$$a^2 - x^2 = s^2(a + x)^2$$

Uma das soluções da equação do segundo grau para $x(s)$ *é* $x(s) = -a$ *na qual não nos serve por não ser uma inversa adequada. A outra solução é*

$$x(s) = a \cdot \frac{1 - s^2}{1 + s^2}$$

Substituindo esse resultado em $y^2 = a^2 - x^2$*, para* $y \geqslant 0$ *obtemos*

$$y(s) = a \cdot \frac{2s}{1 + s^2}$$

Portanto a inversa de ϕ_- *é*

$$\phi_-^{-1}(s) = \left(a \cdot \frac{1 - s^2}{1 + s^2}, \quad a \cdot \frac{2s}{1 + s^2} \right)$$

que é uma função contínua. Logo concluímos que ϕ_- *é um homeomorfismo com* $\mathbb{R}$*. De maneia totalmente análoga, podemos mostrar que o mapa* ϕ_+ *também é.*

O mapa de transição $t(s)$ *ou* $s(t)$ *pode ser obtido diretamente de* (104) *ao multiplicar uma equação pela outra:*

$$st = -\frac{y^2}{(a + x)(a - x)} = -\frac{a^2 - x^2}{a^2 - x^2} = -1$$

e portanto

$$t(s) = -\frac{1}{s}$$

O jacobiano é

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

que é sempre positivo na região do domínio em comum ($t \neq 0$ *e* $s \neq 0$)*. Com isso, concluímos que o atlas formado por* ϕ_- *e* ϕ_+ *é orientado e portanto a circunferência é orientável.*

4.1.3 Vetores tangentes

Seja $f : M \mapsto \mathbb{R}$ uma função suave na variedade diferenciável orientável M de dimensão n. Seja também U um subconjunto aberto de M no qual um ponto $p \in M$ lhe pertence e x^i sendo suas coordenadas locais. Uma parametrização dessas coordenadas pode ser dada por y^j em um domínio V tal que $x^i(y^j) \in U$ e no qual a regra da cadeia entre essas coordenadas existe e é contínua. Podemos obter f pela parametrização fazendo $f(x^i(y^j))$. Com isso, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f$$

No somatório nos deparamos com um elemento matricial $a^i_j = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$, de maneira que

$$\frac{\partial f}{\partial y^j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f$$

Isso significa que o operador diferencial $\dfrac{\partial}{\partial y^j}$ pode ser construído como uma combinação linear de outros operadores $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{i=1}^{n} a^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{105}$$

Com base nisso, podemos afirmar que os operadores diferenciais em x^i formam uma base de um espaço vetorial T de dimensão n[14].

Agora suponha que a parametrização y^j tenha n variáveis independentes e o seu domínio V seja um subconjunto aberto de M no qual contém o ponto p referido no início. Então os diferenciais $\dfrac{\partial}{\partial y^j}$ também formam uma base de T e a^i_j se torna o jacobiano entre x^i e y^j. Com isso, suponha que as derivadas em y^j sejam dadas pela equação (105). Então a jacobiana $A = a^i_j$ é a matriz mudança de base das derivadas em x^i para as derivadas em y^j.

Dado um operador diferencial qualquer $\mathbf{v} \in T$, ele pode ser escrito nas duas bases:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} w^j \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{106}$$

onde u^i e w^j são as coordenadas de $\mathbf{v}$ em suas respectivas bases. Usando (105), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{j=1}^{n} w^j \sum_{i=1}^{n} a^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} w^j a^i_j \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Comparando esse resultado com (106) e sabendo que os elementos da base são linearmente independentes entre si, chegamos na equação

$$u^i = \sum_{j=1}^{n} w^j a^i_j$$

[14] A independência entre as coordenadas garante que esses elementos são linearmente independentes entre si. No caso do $\mathbb{R}^3$, se em algum ponto de uma superfície as suas duas coordenadas forem múltiplas uma da outra, isso resulta em uma região pontiaguda e o jacobiano se anula ou fica indefinido nesse ponto.

Se X for a matriz coluna contendo as coordenadas u^i e Y a matriz com as coordenadas w^j, concluímos que

$$X = AY$$

ou então[15]

$$A^{-1}X = Y$$

Pela definição (1.10), temos que os vetores $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ são contravariantes, o que justifica usarmos o índice superior para as coordenadas u^i ou w^j de $\mathbf{v}$.

Considere o ponto p no qual as coordenadas locais x^i são dadas por $(x^1, \ldots, x^n)\big|_p = (c^1, \ldots, c^n)$. Seja $\mathbf{F}^0(M)$ o conjunto de todas as funções suaves do tipo $M \mapsto \mathbb{R}$. Na região U estão definidos os operadores diferenciais $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, onde agora essas derivadas são calculadas no ponto p. Segue disso que aplicar esses operadores em alguma função $f \in \mathbf{F}^0(M)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$, retornará um número real. Essas derivadas parciais em p nos lembra dos vetores tangentes da seção 3.2, o que nos motiva à seguinte definição:

Definição 4.3 (Vetores tangentes)**.** *Um operador* $\mathbf{v} : \mathbf{F}^0(M) \mapsto \mathbb{R}$ *é denominado de vetor tangente em* p *se* $\mathbf{v}$ *satisfazer as seguintes propriedades para quaisquer* f *e* g *de* $\mathbf{F}^0(M)$*:*

1. $\mathbf{v}(af + bg) = a\mathbf{v}(f) + b\mathbf{v}(g), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$;
2. $\mathbf{v}(f \cdot g) = g(p)\mathbf{v}(f) + f(p)\mathbf{v}(g)$.

Podemos observar que os operadores $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ de fato satisfazem ambas as propriedades, no que podemos chamá-los de vetores tangentes.

A totalidade dos vetores tangentes em p forma um espaço vetorial que denotaremos de T_pM. Além disso, o conjunto $\left\{\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right\}$ forma uma base desse espaço.

Se $f = c$ for uma função de $\mathbf{F}^0(M)$ onde c é uma constante, então para um vetor tangente $\mathbf{v}$ e uma outra função qualquer $g \in \mathbf{F}^0(M)$ temos

$$\mathbf{v}(f \cdot g) = g(p)\mathbf{v}(f) + f(p)\mathbf{v}(g)$$

Mas f é constante e então $\mathbf{v}(f \cdot g) = \mathbf{v}(c \cdot g) = c\mathbf{v}(g)$. Logo

$$\begin{aligned} c\mathbf{v}(g) &= g(p)\mathbf{v}(f) + f(p)\mathbf{v}(g) \\ &= g(p)\mathbf{v}(f) + c\mathbf{v}(g) \end{aligned}$$

$$g(p)\mathbf{v}(f) = 0$$

[15] Vimos na seção anterior que o determinante da jacobiana é diferente de zero e portanto A^{-1} existe.

Como isso é válido para qualquer função g de $\mathbf{F}^0(M)$, segue que

$$\mathbf{v}(f) = 0$$

Isso significa que todos os vetores tangentes em p possuem a propriedade das derivadas de que aplicá-los em uma função constante resulta em zero.

A matriz jacobiana responsável por mudar as coordenadas de uma base de vetores tangentes para outra no ponto p agora é dada por $A = [a^i_j]$, onde $a^i_j = \left.\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_p$.

Denotando $\mathbf{r} = (x^1, \ldots, x^n)$ como sendo um ponto qualquer de U em termos das coordenadas locais x^i, a expansão em série de Taylor até primeira ordem de uma função $f \in \mathbf{F}^0(M)$ é dada por

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{c}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p (x^i - c^i)$$

onde $\mathbf{c} = (c^1, \ldots, c^n)$ representa o ponto p. Aplicando um vetor tangente $\mathbf{v}$ em f obteremos

$$\mathbf{v}(f) = \mathbf{v}(f(\mathbf{c})) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \mathbf{v}(x^i - c^i)$$

Denotando $\mathbf{v}(x^i - c^i) = \mathbf{v}(x^i) = v^i$ e sabendo que $\mathbf{v}(f(\mathbf{c})) = 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(f) &= \sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) f\end{aligned}$$

Como isso é válido para qualquer f, temos a representação do vetor tangente $\mathbf{v}$ em p em termos da base $\left\{\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right\}$:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

Sabendo que esse resultado é análogo para qualquer outro ponto p da variedade M, podemos definir um campo vetorial em M onde em cada ponto p da variedade está definido um vetor tangente nele e esses vetores são suaves na variedade, isto é, variações infinitesimais em um ponto de M são acompanhados por variações também infinitesimais dos vetores tangentes. Nas coordenadas locais de U podemos escrever o campo vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ na forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} v^i(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

4.2 Formas diferenciais

Conforme vimos na seção anterior, denotamos $F^0(M)$ o conjunto de todas as funções suaves na variedade diferenciável M. Agora também dizemos que os elementos desse conjunto são denominados de 0-formas e que $F^0(M)$ é o espaço das formas de grau zero em M.

Seja p um ponto em M. Sejam U e V subconjuntos abertos não-vazios de M em que ambos são uma vizinhança de p com coordenadas locais x^i e y^j respectivamente. Definimos as 1-formas em p como sendo objetos ω que podem ser escritos nas bases $\{\mathrm{d}x^i\}$ e $\{\mathrm{d}y^j\}$,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \mathrm{d}x^i = \sum_{j=1}^{n} w_j \, \mathrm{d}y^j \tag{107}$$

onde as coordenadas u_i e w_j se transformam pela equação

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} w_j b_i^j \tag{108}$$

com $b_i^j = \left.\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p y^j$.

Podemos realizar a transformação inversa de (108) ao multiplicar ambos os lados por a_k^i e aplicar um somatório em i:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i a_k^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_j b_i^j a_k^i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^j a_k^i\right) w_j$$

Mas $A = [a_k^i]$ é a matriz inversa de $B = [b_i^j]$, uma vez que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^j a_k^i = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right|_p = \left.\frac{\partial y^j}{\partial y^k}\right|_p = \delta_k^j$$

e portanto

$$\sum_{i=1}^{n} u_i a_k^i = \sum_{j=1}^{n} \delta_k^j w_j = w_k$$

Isso significa que a matriz $A = [a_k^i]$ usada[16] para levar as bases $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ para $\dfrac{\partial}{\partial y^j}$ é a mesma usada para levar as coordenadas na base $\mathrm{d}x^i$ para $\mathrm{d}y^j$. Ou seja, pela definição (1.11) as 1-formas em p são vetores covariantes, ou covetores.

Agora seja $\mathbf{e}_i = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ um vetor tangente em p. Então

$$\mathbf{e}_i(y^j) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p y^j = b_i^j$$

[16]Lembrando da equação (105) que $\dfrac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

Da equação (108) temos

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbf{e}_i(y^j)$$

Substituindo em (107) na base $\mathrm{d}x^i$, ficamos com

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \mathbf{e}_i(y^j) \right) \mathrm{d}x^i = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i(y^j)\, \mathrm{d}x^i \right)$$

Comparando com (107) na base $\mathrm{d}y^j$ e sabendo que as 1-formas em p são linearmente independentes, então

$$\mathrm{d}y^j = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i(y^j)\, \mathrm{d}x^i \tag{109}$$

Agora iremos definir uma relação bilinear dada por

$$\langle \mathrm{d}x^k, \mathbf{e}_i \rangle = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p x^k = \delta_i^k \tag{110}$$

de maneira que a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ seja o dual da base $\{\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^n\}$ e vice-versa.

Além disso, aplicando essa relação na equação (109) com o vetor tangente em p $\mathbf{e}_k$ teremos

$$\langle \mathrm{d}y^j, \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i(y^j) \langle \mathrm{d}x^i, \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i(y^j) \delta_k^i = \mathbf{e}_k(y^j)$$

e portanto

$$\mathrm{d}y^j = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{d}y^j, \mathbf{e}_i \rangle\, \mathrm{d}x^i$$

Multiplicando ambos os lados por w_j e aplicando uma somatória em j, iremos obter um resultado que vale para qualquer 1-forma ω em p:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} w_j\, \mathrm{d}y^j = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{j=1}^{n} w_j\, \mathrm{d}y^j, \mathbf{e}_i \right\rangle \mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^{n} \langle \omega, \mathbf{e}_i \rangle\, \mathrm{d}x^i$$

O produto exterior entre q 1-formas em p geram q-formas em p. Com isso, podemos definir q-formas em uma variedade diferenciável M ao associar uma q-forma em p para cada ponto p de M de maneira que as suas coordenadas variem suavemente em M. Por exemplo, para uma q-forma ω em M dada por

$$\omega = \sum_{H} u_H(\mathbf{r})\, \mathrm{d}x^H \qquad H = \{h_1, \ldots, h_q\}$$

necessita-se que $u_H(\mathbf{r})$ sejam funções suaves. O conjunto desses objetos formam $\mathbf{F}^q(M)$, que é o espaço vetorial das q-formas em M. O produto exterior de uma

q-forma com uma p-forma gera uma $(p+q)$-forma, que é obtida ao realizar o produto exterior entre as formas para cada ponto de M.

Sabendo que

$$\mathrm{d}x^k = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^k \, \mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) x^k$$

podemos definir uma derivada exterior d dado (na base das coordenadas em x^i) por

$$d = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

no qual leva uma p-forma para uma $(p+1)$-forma do seguinte modo:

$$d(f \, \mathrm{d}x^H) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \, \mathrm{d}x^H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^H$$

Para uma p-forma mais geral ω dada por

$$\omega = \sum_H a_H \, \mathrm{d}x^H$$

temos que

$$\mathrm{d}\omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left(\sum_H a_H \, \mathrm{d}x^H \right)$$

$$\mathrm{d}\omega = \sum_H \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_H}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^H$$

que é a mesma expressão que aparece na demonstração do teorema 3.2 e portanto a derivada exterior d satisfaz os quatro axiomas (6, 7, 8 e 9) vistos na seção 3.3.

Se M e N são variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente e $\phi : M \mapsto N$ é um mapa suave entre as coordenadas em M e em N, então podemos definir uma função $\phi_p^* : F^p(N) \mapsto F^p(M)$ que converte uma p-forma em N com coordenadas locais em N para uma p-forma em M com coordenadas locais de M. Conforme vimos na seção 3.4, essas funções satisfazem

1. $\phi_p^*(\omega + \gamma) = \phi_p^*(\omega) + \phi_p^*(\gamma)$
2. $\phi_{p+q}^*(\omega \wedge \lambda) = \phi_p^*(\omega) \wedge \phi_q^*(\lambda)$
3. $\mathrm{d}(\phi_p^* \omega) = \phi_{p+1}^*(\mathrm{d}\omega)$
4. Se $\phi : U \mapsto V$ e $\psi : V \mapsto W$, então $(\psi \circ \phi)_p^* = \phi_p^* \circ \psi_p^*$

4.3 Simplexos

Definição 4.4 (Envoltório convexo). *Seja X um conjunto não vazio de pontos no $\mathbb{R}^n$. A interseção de todos os subconjuntos convexos do $\mathbb{R}^n$ que contém todos os pontos de X formam um envoltório convexo de X.*

Um exemplo de envoltório convexo no espaço $\mathbb{R}^2$ é a analogia de uma coleira elástica que se molda nos pontos mais "externos"de X. Na figura 7 temos cinco pontos em azul no $\mathbb{R}^2$ que formam um conjunto X. E então usamos três círculos (que são subconjuntos convexos) de diferentes raios e centros que englobem X e pintamos a interseção entre esses subconjuntos de amarelo. Já na figura 8 colocamos novos quatro círculos com raios maiores que englobem X e então a interseção entre os sete círculos nos dá uma noção de como seria o envoltório convexo de X. Podemos também usar outros subconjuntos convexos como retângulos, triângulos entre outros para que a região em amarelo fique ainda mais parecido com o envoltório convexo.
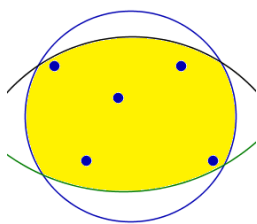
Figura 7: Três subconjuntos convexos contendo os pontos de X.
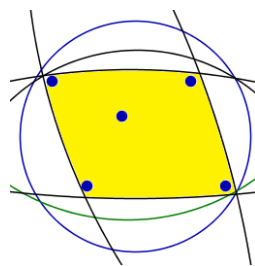
Figura 8: Sete subconjuntos convexos contendo os pontos de X.

O envoltório convexo desses pontos é um paralelogramo cujos vértices são os quatro pontos mais externos. O próprio paralelogramo é um subconjunto convexo e portanto também pode ser usado para englobar X. Esse paralelogramo acaba tornando-se o menor subconjunto convexo do $\mathbb{R}^2$ que contém X.

Seja $X = \{p_1, \ldots, p_k\}$ um conjunto de pontos no $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{u}_{ij}$ são os vetores que ligam o ponto p_j até p_i,

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{r}(p_i) - \mathbf{r}(p_j)$$

forem linearmente independentes para quaisquer i e j,

$$\forall j : \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} a_i \mathbf{u}_{ij} = 0 \implies a_i = 0 \ \forall i$$

então dizemos que X é um conjunto de pontos independentes. Por exemplo em um conjunto X com três pontos independentes, esses pontos não podem ser colineares. Com quatro pontos independentes, estes não podem pertencer a um único plano simultaneamente.

Definição 4.5 (Simplexos)**.** *Seja* $X = \{p_0, \ldots, p_k\}$ *um conjunto de* $k+1$ *pontos independentes do* $\mathbb{R}^n$. *O envoltório convexo de* X *é denominado de* k*-simplexo. Esse* k*-simplexo é denotado pela expressão* $[p_0, \ldots, p_k]$.

Usando combinação convexa pode-se mostrar que um n-simplexo $\mathbf{s}^n$ que é o envoltório convexo de $X = \{p_0, \ldots, p_n\}$ pode ser expresso pelo conjunto de pontos dado por

$$\mathbf{s}^n = \left\{ t_0 p_0 + \ldots + t_n p_n \quad : \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 1; \quad t_i \geqslant 0 \quad \forall i \right\} \tag{111}$$

Isso significa que um 1-simplexo é um ponto; um 2-simplexo é um segmento de reta; 3-simplexo é um triângulo e um 4-simplexo é um tetraedro.

Dizemos que um n-simplexo é orientado quando permutações ímpares entre os pontos inverte o seu sinal, enquanto que permutações pares mantém o sinal. Por exemplo

$$[p_0, p_1, p_2] = -[p_1, p_0, p_2] = [p_1, p_2, p_0]$$

A fronteira de um n-simplexo orientado $\mathbf{c}$ é denotado por $\partial\mathbf{c}$ e é definido pela expressão

$$\partial[p_0, \ldots, p_n] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j [p_0, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_n] \tag{112}$$

o que significa que a fronteira de um n-simplexo é a soma[17] de vários $(n-1)$-simplexos orientados.

Exemplo 4.2. *Seja o* 2*-simplexo orientado dado por* $\mathbf{c} = [p_0, p_1, p_2]$ *representado na figura 9. A ordem* p_0*,* p_1 *e* p_2 *indica que o triângulo está orientado no sentido anti-horário, mostrado pela seta circular. A fronteira desse simplexo é dado por*

$$\begin{aligned} \partial\mathbf{c} &= [p_1, p_2] - [p_0, p_2] + [p_0, p_1] \\ &= [p_1, p_2] + [p_2, p_0] + [p_0, p_1] \end{aligned}$$

Isso significa que as fronteiras desse triângulo são segmentos de reta orientados que ligam os vértices, denotados pelas arestas com as setas.

Teorema 4.1. *Se* $\mathbf{c}$ *é um simplexo orientado, então* $\partial\partial\mathbf{c} = 0$.

Demonstração. Suponha que $\mathbf{c}$ é um n-simplexo dado por

$$\mathbf{c} = [v_0, \ldots, v_n]$$

[17] A soma entre simplexos deve ser entendida como a união dos subconjuntos de pontos do espaço euclidiano que compõem cada simplexo.
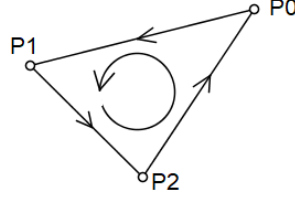
Figura 9: Um 2-simplexo orientado e suas fronteiras.

Aplicando novamente ∂ na equação (112) e sabendo que a fronteira da soma de simplexos é a soma das fronteiras dos simplexos, temos que

$$\begin{aligned}\partial\partial\mathbf{c} &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\partial[v_0,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_n]\\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i[v_0,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_n]_i\end{aligned}$$

onde $[v_0,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_n]_i$ denota que o i-ésimo ponto de $[v_0,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},\ldots,v_n]$ foi suprimido[18]. Sabemos que o resultado será uma soma de $(n-2)$-simplexos, ou seja, dois pontos distintos foram suprimidos do n-simplexo original em cada termo da soma. Agora suponha dois pontos v_p e v_q. Sem perda de generalidade, iremos presumir $p < q$. Há duas formas de obter um $(n-2)$-simplexo sem esses dois pontos do n-simplexo original: eliminando primeiro v_q e depois v_p ou o contrário, primeiro v_p e então v_q. Eliminando v_q primeiro, segue que o p-ésimo ponto do $(n-1)$-simplexo resultante será v_p. Então esse $(n-2)$-simplexo é gerado pelos índices $j = q$ e $i = p$ e deve aparecer um termo na soma do tipo

$$(-1)^{q+p}[v_0,\ldots,v_{p-1},v_{p+1},\ldots,v_{q-1},v_{q+1},\ldots,v_n]$$

Por outro lado, se eliminarmos primeiro v_p, então o q-ésimo ponto do $(n-1)$-simplexo resultante será v_{q+1}. Logo o $(q-1)$-ésimo ponto será v_q e consequentemente um $(n-2)$-simplexo dado por

$$(-1)^{p+(q-1)}[v_0,\ldots,v_{p-1},v_{p+1},\ldots,v_{q-1},v_{q+1},\ldots,v_n]$$

é gerado com os índices $j = p$ e $i = q-1$. Porém um tem sinal $(-1)^{q+p}$ e o outro $(-1)^{p+(q-1)} = -(-1)^{p+q}$. Como os sinais são diferentes e ambos possuem a mesma ordenação, então eles se anulam na soma. Como isso é válido para qualquer par de pontos distintos v_p e v_q, segue que a soma total é zero, isto é, $\partial\partial\mathbf{c} = 0$. ■

Em um n-simplexo $\mathbf{s}^n$ dado pela expressão (111), os coeficientes t_i, cuja soma é 1, são denominados de coordenadas baricêntricas de $\mathbf{s}^n$.

[18]Note que o i-ésimo ponto desse $(n-1)$-simplexo não necessariamente é v_i.

Queremos estabelecer uma relação entre os pontos de dois simplexos distintos usando suas coordenadas baricêntricas. Para isso precisaremos do próximo teorema.

Teorema 4.2 (Unicidade das coordenadas baricêntricas)**.** *Seja S o conjunto dado por*

$$S = \left\{ t_0p_0 + t_1p_1 + \ldots + t_np_n \in \mathbb{R}^k \; : \; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

onde $X = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ é um conjunto de pontos independentes em $\mathbb{R}^k$. Então existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de S e as (n+1)-uplas

$$(t_0, t_1, \ldots, t_n)$$

com

$$\sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \tag{113}$$

Demonstração. Suponha que as $(n+1)$-uplas $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ e $(t'_0, t'_1, \ldots, t'_n)$ restritas às condições (113) representem um mesmo ponto em S, ou seja,

$$t_0p_0 + t_1p_1 + \ldots + t_np_n = t'_0p_0 + t'_1p_1 + \ldots + t'_np_n \in \mathbb{R}^k \tag{114}$$

Segue disso que

$$\sum_{i=0}^{n} (t_i - t'_i)p_i = 0$$

De maneira conveniente, reescreveremos essa expressão como

$$(t_0 - t'_0)p_0 + \sum_{i=1}^{n} (t_i - t'_i)p_i = 0 \tag{115}$$

Como os pontos de X são independentes, temos que

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i(p_i - p_j) = 0 \implies \alpha_i = 0 \; \forall i$$

Como isso é válido para todo j, sem perda de generalidade faremos $j = 0$. Queremos saber o valor de

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t'_i)(p_i - p_0)$$

pois se for sempre nulo, teremos que $t_i - t'_i = 0$, que é o que queremos. Expandindo o produto na somatória, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (t_i - t'_i)(p_i - p_0) &= \sum_{i=1}^{n} t_ip_i + t'_ip_0 - t_ip_0 - t'_ip_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t'_i)p_i + p_0 \left(\sum_{i=1}^{n} t'_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \right)
\end{aligned}$$

Mas de (113) e (115) temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_i')(p_i - p_0) &= -\left((t_0 - t_0')p_0\right) + p_0\left((1 - t_0') - (1 - t_0)\right)\\ &= -(t_0 - t_0')p_0 + (t_0 - t_0')p_0\\ &= 0\end{aligned}$$

e portanto $t_i - t_i' = 0 \implies t_i = t_i' \; \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Isso significa que os n últimos termos de cada membro da equação (114) são idênticos e então

$$t_0 p_0 = t_0' p_0 \implies t_0 = t_0'$$

Logo para cada ponto em S há apenas uma única (n+1)-upla $(t_0, \ldots, t_n)$ restrita às condições (113). ∎

No caso particular dos simplexos em que $t_i \geqslant 0 \; \forall i$, o teorema (4.2) se aplica. Agora sejam dois n-simplexos orientados dados por $\mathbf{s}^n = [p_0, \ldots, p_n]$ e $\mathbf{t}^n = [q_0, \ldots, q_n]$. Podemos criar um mapa entre os pontos de $\mathbf{s}^n$ e de $\mathbf{t}^n$ fazendo

$$\sum_{i=0}^{n} t_i p_i \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} t_i q_i$$

Como as coordenadas baricêntricas são únicas para cada simplexo, então essa relação é biunívoca. Além disso, se $t_i = \delta_{ij}$, temos que

$$p_j \Longleftrightarrow q_j \quad \forall j$$

Isso significa que esse mapa preserva a ordem dos vértices dos dois simplexos.

Sabendo disso, podemos definir uma integral de uma p-forma em um simplexo específico $\mathbf{\Delta}^n$ e então calcular essa integral em outros simplexos quaisquer com base em $\mathbf{\Delta}^n$.

Definição 4.6 (Simplexo padrão)**.** *Um n-simplexo cujos vértices inclui a origem enquanto que os demais são representados pelos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^n$ é denominado de n-simplexo padrão, que é denotado por $\mathbf{\Delta}^n$. O n-simplexo padrão pode ser escrito na forma*

$$\mathbf{\Delta}^n = \left\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant 1; \quad t_i \geqslant 0 \; \forall i\right\}$$

Note que o n-simplexo padrão é definido[19] apenas no espaço $\mathbb{R}^n$, ao contrário de outros n-simplexos que podem existir em $\mathbb{R}^k$, com $k \geqslant n$.

O n-simplexo padrão é o simplexo cuja origem é um de seus vértices e é a ponta de um cubo n-dimensional. Por exemplo $\mathbf{\Delta}^2 = [(0,0); \; (1,0); \; (0,1)]$ é

[19] Em outros textos um n-simplexo padrão é definido substituindo $\sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant 1$ por $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$ e $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{R}^{n+1}$ na definição (4.6), o que exclui a origem e diminui a dimensão em 1. Entretanto não usaremos essa definição aqui.

um triângulo retângulo com catetos unitários no $\mathbb{R}^2$ cujo ângulo reto está na origem e portanto é a ponta de um quadrado. Podemos equivalentemente falar que $\mathbf{\Delta}^2$ é o subconjunto fechado do $\mathbb{R}^2$ cujas fronteiras são os eixos x e y e a reta $x + y = 1$. Analogamente $\mathbf{\Delta}^3 = [(0,0,0);\ (1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1)]$ é o subconjunto fechado do $\mathbb{R}^3$ delimitado pelos planos xy, yz, xz e o plano $x + y + z = 1$.

4.4 Integração de formas diferenciais

Iremos definir a integração de uma n-forma $\omega = f\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n$ em um n-simplexo padrão $\mathbf{\Delta^n}$ (no qual ω está bem definida) pela equação

$$\int_{\mathbf{\Delta}^n} \omega = \int_{\mathbf{\Delta}^n} f(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n$$

Por exemplo, se $\omega = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ então

$$\int_{\mathbf{\Delta}^2} \omega = \int_{\mathbf{\Delta}^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

no qual também pode ser escrito na forma

$$\int_{\mathbf{\Delta}^2} \omega = \int_{\mathbf{\Delta}^1} \left(\int_0^{1-x} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Em geral, para uma $(p+1)$-forma do tipo $\omega = A\,\mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p\,\mathrm{d}x^{p+1}$ e o simplexo padrão $\mathbf{\Delta^{p+1}}$, teremos

$$\int_{\mathbf{\Delta}^{p+1}} \omega = \int_{\mathbf{\Delta}^p} \left(\int_0^{1-\sum_{i=1}^p x^i} A\,\mathrm{d}x^{p+1} \right) \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p$$

onde $\mathbf{\Delta}^p$ é o p-simplexo padrão envolvendo as coordenadas $x^1, \ldots, x^p$.

Agora sejam $\mathbf{s}^n = [p_0, \ldots, p_n]$ e $\mathbf{t}^n = [q_0, \ldots, q_n]$ dois n-simplexos orientados. Queremos uma vizinhança U que inclua o simplexo $\mathbf{s}^n$ e uma vizinhança V de $\mathbf{t}^n$. Entretanto os simplexos são conjuntos fechados e necessitamos que U e V sejam conjuntos abertos para não haver problemas relacionados à derivada nas fronteiras.

Para resolver esse problema, iremos definir dois espaços planos W e Z dados por

$$W = \left\{ t_0 p_0 + \ldots + t_n p_n \quad : \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

e

$$Z = \left\{ t_0 q_0 + \ldots + t_n q_n \quad : \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

O que diferencia W e Z dos simplexos é que as coordenadas t_i podem ser quaisquer reais, não necessariamente não-negativas. Por exemplo, se $\mathbf{s}^n$ for um

segmento de reta, então W é a reta que o inclui. Se $\mathbf{s}^n$ for um triângulo, então W é o plano que o contém e assim por diante.

Dessa forma, definimos U e V vizinhanças abertas contidas no menor subconjunto de W e de Z que inclua $\mathbf{s}^n$ e $\mathbf{t}^n$ respectivamente.

Agora seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Podemos construir um mapa suave ϕ que leva um ponto de U até M,

$$\phi : U \mapsto M$$

e um segundo mapa também suave ψ dado por

$$\psi : V \mapsto M$$

Com isso definimos dois objetos

$$(\mathbf{s}^n,\ U,\ \phi) \quad \text{e} \quad (\mathbf{t}^n,\ V,\ \psi)$$

que relacionam os dois simplexos com a variedade M. Dizemos que ambos os objetos são equivalentes se para as mesmas coordenadas baricêntricas os mapas ϕ e ψ levam U e V respectivamente ao mesmo ponto em M, ou seja,

$$\phi\left(\sum_{i=0}^{n} t_i p_i\right) = \psi\left(\sum_{i=0}^{n} t_i q_i\right)$$

Todos os objetos do tipo $(\mathbf{s}^n,\ U,\ \phi)$ que são equivalentes entre si formam uma classe de equivalência que denotaremos por σ^n e chamaremos de n-simplexo em M.

Uma vez que sempre podemos estabelecer uma relação de um para um entre dois simplexos quaisquer, então para um n-simplexo σ^n qualquer em M sempre podemos construir um mapa ϕ que mapeará os pontos da vizinhança U de um simplexo padrão $\boldsymbol{\Delta}^n$ para a variedade M e que simultaneamente $(\boldsymbol{\Delta}^n,\ U,\ \phi)$ pertença à classe σ^n.

Obtido tal mapa $\phi : U \mapsto M$, podemos construir uma função ϕ_n^* que leve uma n-forma em M para uma n-forma em U,

$$\phi_n^* : F^n(M) \mapsto F^n(U)$$

de maneira que se ω é uma n-forma em M, então $\phi_n^*\omega$ é uma n-forma em U. Logo temos que

$$\int_{\sigma^n} \omega = \int_{\boldsymbol{\Delta}^n} \phi_n^*\omega$$

Esse é o procedimento no qual calculamos uma integral de uma n-forma ω em um n-simplexo σ^n em M.

O próximo passo é aglomerar vários simplexos de maneira que cada um seja homeomorfo com um subconjunto aberto de M e englobem toda essa variedade.

Antes disso, devemos definir o que seriam as faces de um simplexo $\mathbf{s}^n$. As fronteiras de $\mathbf{s}^n$ são dadas por

$$\partial \mathbf{s}^n = \sum_i \pm \mathbf{t}_i$$

e então denominamos os (n-1)-simplexos $\mathbf{t}_i$ de faces de $\mathbf{s}^n$.

Seja $(\mathbf{s}^n,\ U,\ \phi)$ um simplexo em M pertencente à classe σ^n. Restringindo o mapa ϕ às faces $\mathbf{t}_i$ de $\mathbf{s}^n$ e V_i sendo uma vizinhança de $\mathbf{t}_i$ no menor espaço plano que contém $\mathbf{t}_i$, então montamos um novo (n-1)-simplexo τ_i em M dado por

$$\tau_i = (\mathbf{t}_i,\ V_i,\ \phi)$$

de maneira que podemos definir as faces τ_i de um simplexo σ^n em M pela expressão

$$\partial\sigma^n = \sum_i \pm\tau_i$$

Iremos definir uma n-cadeia simplicial $\mathbf{c}$ em uma variedade M como sendo uma combinação linear de vários n-simplexos σ_i^n em M dada por

$$\mathbf{c} = \sum_i a_i\sigma_i^n$$

onde a_i são constantes. A integral em uma cadeia simplicial é dada pela soma das suas partes:

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega$$

Um espaço topológico M é dito triangularizável se existir pelo menos uma cadeia simplicial $\mathbf{c}$ tal que seja possível construir um homeomorfismo entre M e $\mathbf{c}$.

É um resultado conhecido da topologia que todas as variedades diferenciáveis de quaisquer dimensões são triangularizáveis. Um exemplo de triangulação é ilustrado na figura 10, onde a superfície de um toro é coberta pela junção de vários 2-simplexos. Em cada simplexo σ_i podemos construir um conjunto aberto U em um plano $ax + by + cz = d$ que o contém de maneira que possamos criar um mapa biunívoco entre U e uma parte da superfície do toro. E então todos os pontos da variedade são cobertos por um homeomorfismo com a cadeia de simplexos.

Exemplo 4.3 (Integrando em um 2-simplexo no $\mathbb{R}^3$)**.** *Suponha que* $\mathbf{s}^2 = [p_0, p_1, p_2]$ *seja um simplexo no* $\mathbb{R}^3$ *e* $f(x, y)$ *uma função diferenciável definida em* $\mathbf{s}^2$*. O simplexo padrão* $\mathbf{\Delta^2}$ *é dado por* $[(0,0),\ (1,0),\ (0,1)]$*. Queremos criar um mapa entre esses dois simplexos, simbolizado pela expressão*

$$t_0q_0 + t_1q_1 + t_2q_2 \Longleftrightarrow t_0p_0 + t_1p_1 + t_2p_2$$

Dados $q_0 = (0,0)$*,* $q_1 = (1,0)$ *e* $q_2 = (0,1)$ *e denominando* $t_1 = u$ *e* $t_2 = v$*, impomos* $t_0 = 1 - u - v$ *para que as coordenadas baricêntricas* t_i *sejam únicas (teorema 4.2) e então*

$$(u, v) \Longleftrightarrow (1 - u - v)p_0 + up_1 + vp_2$$
$$(u, v) \Longleftrightarrow p_0 + u(p_1 - p_0) + v(p_2 - p_0)$$
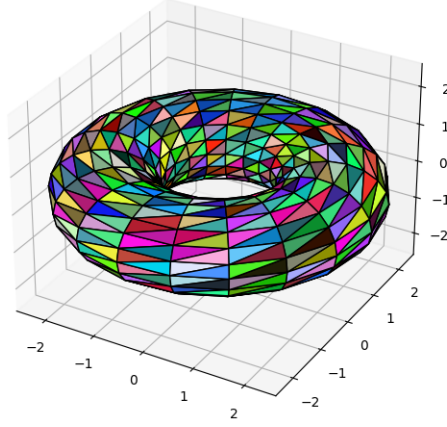
Figura 10: Triangulação de um toro com raio externo $d = 2$ e raio interno $r = 1$ usando 2-simplexos.

Segue disso que as transformações de coordenadas são

$$\begin{aligned} x(u,v) &= p_{0_x} + u(p_{1_x} - p_{0_x}) + v(p_{2_x} - p_{0_x}) \\ y(u,v) &= p_{0_y} + u(p_{1_y} - p_{0_y}) + v(p_{2_y} - p_{0_y}) \\ z(u,v) &= p_{0_z} + u(p_{1_z} - p_{0_z}) + v(p_{2_z} - p_{0_z}) \end{aligned}$$

Agora suponha que o simplexo $\mathbf{s}^2$ *não seja paralelo a algum plano perpendicular ao plano* xy*, de maneira que possamos isolar* z *em função de* x *e* y*. Logo*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= (p_{1_x} - p_{0_x})\,\mathrm{d}u + (p_{2_x} - p_{0_x})\,\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y &= (p_{1_y} - p_{0_y})\,\mathrm{d}u + (p_{2_y} - p_{0_y})\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

e então para uma 2*-forma* $f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *temos*

$$\phi_2^*(f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \gamma_z f(x(u,v), y(u,v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_z &= \big((p_{1_x} - p_{0_x})(p_{2_y} - p_{0_y}) - (p_{2_x} - p_{0_x})(p_{1_y} - p_{0_y})\big) \\ &= \big((p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0)\big)\big|_z \end{aligned}$$

é a componente z *(não-nula) do vetor normal à superfície do simplexo* $\mathbf{s}^2$*. Segue disso que a integral* I *da* 2*-forma* $f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *em* $\mathbf{s}^2$ *é*

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathbf{s}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \gamma_z \iint_{\boldsymbol{\Delta}^2} f(x(u,v), y(u,v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \gamma_z \int_0^1 \int_0^{1-u} f(x(u,v), y(u,v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

4.5 Teorema de Stokes generalizado

Vimos na seção de revisão cinco teoremas fundamentais que relacionam uma integral em uma dimensão $n \leqslant 3$ com uma integral em uma dimensão menor ao custo de uma derivada. No teorema fundamental do cálculo temos

$$\int_a^b \mathrm{d}f = f(b) - f(a)$$

no qual no membro esquerdo temos uma integral da derivada de f em um intervalo $[a, b]$ e do lado direito temos f avaliado nas bordas desse intervalo, b e a respectivamente. O teorema do gradiente é similar, pois é a generalização do teorema fundamental para uma curva em $\mathbb{R}^n$.

No teorema de Green, temos uma integral unidimensional se relacionando com uma integral dupla de derivadas parciais:

$$\oint_{\partial\Sigma} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

A sua generalização para o $\mathbb{R}^3$, o teorema de Stokes, também é desse tipo, onde as derivadas se tornam no rotacional.

E o teorema da divergência de Gauss temos uma integral de superfície se relacionando com uma integral tripla de um divergente:

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}\tau$$

Esses teoremas citados, que reduzem ou aumentam a dimensão de uma integral inclusive fazem parte das demonstrações das integrações por partes.

Usando tudo o que foi aprendido sobre formas diferenciais e a integração destas em variedades diferenciáveis, podemos mostrar que todos esses teoremas fundamentais são casos particulares de um único, que é o teorema de Stokes generalizado.

Teorema 4.3 (Teorema de Stokes)**.** *Seja ω uma p-forma definida em uma variedade orientável M e $\mathbf{c}$ uma $(p+1)$-cadeia simplicial em M. Então*

$$\int_{\partial\mathbf{c}} \omega = \int_{\mathbf{c}} \mathrm{d}\omega$$

Demonstração. Sabendo que uma cadeia simplicial é uma combinação linear de vários simplexos, é suficiente provarmos que

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} \mathrm{d}\omega$$

onde σ é um $(p+1)$-simplexo de $\mathbf{c}$ com uma representação em um simplexo padrão dada por

$$(\boldsymbol{\Delta}^{p+1}, U, \phi)$$

para algum mapa ϕ. Segue disso que

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\partial \mathbf{\Delta}^{p+1}} \phi_p^* \omega \quad \text{e} \quad \int_{\sigma} \mathrm{d}\omega = \int_{\mathbf{\Delta}^{p+1}} \phi_{p+1}^*(\mathrm{d}\omega)$$

Definindo $\mu = \phi_p^*\omega$ e sabendo que $\phi_{p+1}^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\phi_p^*\omega)$, devemos provar que

$$\int_{\partial \mathbf{\Delta}^{p+1}} \mu = \int_{\mathbf{\Delta}^{p+1}} \mathrm{d}\mu$$

A p-forma μ pode ser representada em uma base $\mathrm{d}x^H$:

$$\mu = \sum_H A_H \, \mathrm{d}x^H$$

onde $A_H = A_H(x^1, \ldots, x^p, x^{p+1})$ e H são subconjuntos de p índices distintos de $\{1, 2, \ldots, p+1\}$. Uma vez que a derivada exterior é linear, assim como a integral, nos é suficiente demonstrar apenas para o caso particular em que μ é representado por uma única p-forma,

$$\mu = A \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p$$

Logo

$$\mathrm{d}\mu = \frac{\partial A}{\partial x^{p+1}} \, \mathrm{d}x^{p+1} \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p = (-1)^p \frac{\partial A}{\partial x^{p+1}} \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^{p+1}$$

Segue disso que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{\Delta}^{p+1}} \mathrm{d}\mu &= \int_{\mathbf{\Delta}^{p+1}} (-1)^p \frac{\partial A}{\partial x^{p+1}} \, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^{p+1} \\ &= (-1)^p \int_{\mathbf{\Delta}^p} \left(\int_0^{1-\sum_{i=1}^p x^i} \frac{\partial A}{\partial x^{p+1}} \, \mathrm{d}x^{p+1} \right) \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p \end{aligned}$$

Agora

$$\int_0^{1-\sum_{i=1}^p x^i} \frac{\partial A}{\partial x^{p+1}} \, \mathrm{d}x^{p+1} = A\left(x^1, \ldots, x^p, 1 - \sum_{i=1}^p x^i\right) - A(x^1, \ldots, x^p, 0)$$

e então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{\Delta}^{p+1}} \mathrm{d}\mu = (-1)^p \int_{\mathbf{\Delta}^p} A\left(x^1, \ldots, x^p, 1 - \sum_{i=1}^p x^i\right) \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p - \\ (-1)^p \int_{\mathbf{\Delta}^p} A\left(x^1, \ldots, x^p, 0\right) \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p \end{aligned} \tag{116}$$

Por outro lado sabemos que $\mathbf{\Delta}^{p+1} = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{p+1}]$, onde $\mathbf{e}_i$ é o i-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^{p+1}$. Então

$$\partial \mathbf{\Delta}^{p+1} = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{p+1}] - [\mathbf{0}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{p+1}] + \ldots + (-1)^{p+1}[\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p]$$

Mas como $\mu = A\,\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^p$ e pelo menos uma coordenada x^i, $i \neq p+1$ é constante[20] em todas as faces exceto a primeira e a última, temos que as integrais em μ nessas faces serão nulas. Então temos que

$$\int_{\partial \boldsymbol{\Delta}^{p+1}} \mu = \int_{[\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{p+1}]} \mu + (-1)^{p+1} \int_{[\mathbf{0},\dots,\mathbf{e}_p]} \mu$$

no qual identificamos $[\mathbf{0},\dots,\mathbf{e}_p] = \boldsymbol{\Delta}^p$. Como $x^{p+1} = 0$ em todo esse simplexo padrão, teremos

$$\begin{aligned}(-1)^{p+1} \int_{[\mathbf{0},\dots,\mathbf{e}_p]} \mu &= (-1)^{p+1} \int_{\boldsymbol{\Delta}^p} A(x^1,\dots,x^p,0)\,\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^p \\ &= -(-1)^p \int_{\boldsymbol{\Delta}^p} A(x^1,\dots,x^p,0)\,\mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^p\end{aligned}$$

que é o segundo termo da equação (116). Já na integral em $[\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{p+1}]$ podemos usar um mapa entre esse simplexo e o simplexo padrão $\boldsymbol{\Delta}^p = [\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p]$ usando uma generalização do exemplo 4.3:

$$x^i = p_{0_i} + \sum_{j=1}^{p} y^j (p_{j_i} - p_{0_i})$$

onde y^j são as coordenadas em $\boldsymbol{\Delta}^p$ e

$$\begin{aligned} p_{j_i} &= \delta_{ij} \quad \forall j \neq 0 \\ p_{0_i} &= \delta_{i(p+1)} \end{aligned}$$

de maneira que o ponto p_0 seja $\mathbf{e}_{p+1}$ enquanto que os demais pontos p_i são inalterados[21]. Podemos ver isso ao substituir os pontos pelos deltas de Kronecker:

$$x^i = \delta_{i(p+1)} + \sum_{j=1}^{p} y^j (\delta_{ij} - \delta_{i(p+1)})$$

Se $i \neq p+1$, temos

$$x^i = \sum_{j=1}^{p} y^j \delta_{ij} = y^i \tag{117}$$

---

[20] No caso do tetraedro $\boldsymbol{\Delta}^3$, temos que uma de suas faces é $-[\mathbf{0},\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$, que é um triângulo retângulo no plano yz com o ângulo reto na origem e então $x^1 = 0$ em toda essa face. Portanto se houver uma forma diferencial $\mathrm{d}x^1$ na integração dessa face, teremos uma integral do tipo $\int_0^0$, que é zero.

[21] No caso do simplexo $[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$, que é um triângulo cujos vértices são $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ respectivamente, temos que $p_0 = (0,0,1)$, enquanto que $p_1 = (1,0,0)$ e $p_2 = (0,1,0)$. O simplexo padrão $\boldsymbol{\Delta}^2$ terá os mesmos vértices do outro simplexo porém com $(0,0,1)$ substituído por $(0,0,0)$.

Mas se $i = p + 1$,

$$\begin{aligned} x^{p+1} &= 1 + \sum_{j=1}^{p} y^j (\delta_{ij} - 1) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{p} y^j \delta_{ij} - \sum_{j=1}^{p} y^j \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{p} y^j \end{aligned}$$

uma vez que $j \neq i = p + 1$ em todo o primeiro somatório. Usando o resultado (117), ficamos com

$$\begin{aligned} x^{p+1} &= 1 - \sum_{j=1}^{p} x^j \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{p} x^i \end{aligned}$$

Além disso, temos $\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}y^i$ para todo $i \neq p + 1$.

Porém nesse mapa trocamos o simplexo $[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}]$ por $[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{0}]$ (já que usamos p_0 como sendo $\mathbf{e}_{p+1}$). O simplexo padrão $\boldsymbol{\Delta}^p$ é obtido ao mudar a orientação dos vértices permutando o vértice $\mathbf{0}$ da última posição até a primeira, o que deve carregar um fator $(-1)^p$. Então temos que

$$\begin{aligned} \int_{[\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}]} \mu &= \int_{[\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_p,\mathbf{e}_{p+1}]} A\left(x^1, \ldots, x^p, x^{p+1}\right) \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p \\ &= \int_{[\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_p,\mathbf{0}]} A\left(x^1, \ldots, x^p, 1 - \sum_{i=1}^{p} x^i\right) \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p \\ &= (-1)^p \int_{[\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_p]} A\left(x^1, \ldots, x^p, 1 - \sum_{i=1}^{p} x^i\right) \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p \\ &= (-1)^p \int_{\boldsymbol{\Delta}^p} A\left(x^1, \ldots, x^p, 1 - \sum_{i=1}^{p} x^i\right) \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^p \end{aligned}$$

que é o primeiro termo da equação (116). Logo

$$\int_{\partial \boldsymbol{\Delta}^{p+1}} \mu = \int_{\boldsymbol{\Delta}^{p+1}} \mathrm{d}\mu$$

o que completa a demonstração. ■

Corolário (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Embora tenhamos usado o Teorema Fundamental do Cálculo para demonstrar o teorema generalizado de Stokes, podemos recuperá-lo ao fazer $\sigma = [a, b]$ um intervalo fechado em $\mathbb{R}$. Então*

$\partial\sigma = [b] - [a]$ *e para uma função integrável* $\omega = f$ *temos*

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{[b]-[a]} f = f(b) - f(a)$$

enquanto que

$$\int_{\sigma} \mathrm{d}\omega = \int_{[a,b]} \mathrm{d}f = \int_a^b \mathrm{d}f$$

Então o teorema de Stokes afirma que

$$\int_a^b \mathrm{d}f = f(b) - f(a)$$

Corolário (Teorema do gradiente)**.** *Dado uma função escalar diferenciável* $V(x^1, \ldots, x^n)$*, podemos fazer* $\omega = V$*, de maneira que*

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$$

Sendo $\mathbf{c}$ *a cadeia* 1*-simplicial dada pela junção de vários segmentos de retas no* $\mathbb{R}^n$ *que une dois pontos* P *e* Q*, a curva resultante entre esses dois pontos é suave por partes. Denotando essa cadeia como*

$$\mathbf{c} = [P, R_1] + [R_1, R_2] + \ldots + [R_{k-1}, R_k] + [R_k, Q]$$

onde R_i *denota os pontos comuns entre dois segmentos de reta, temos que a fronteira de* $\mathbf{c}$ *se torna uma soma telescópica, no que*

$$\partial\mathbf{c} = -[P] + [Q]$$

Logo

$$\int_{\partial\mathbf{c}} \omega = \int_{[Q]-[P]} V = V(Q) - V(P)$$

e

$$\int_{\mathbf{c}} \mathrm{d}\omega = \int_{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$$

Mas notamos que

$$\boldsymbol{\nabla} V \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x^i} \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}x^j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i$$

Portanto o teorema generalizado de Stokes afirma que

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\nabla} V \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = V(Q) - V(P)$$

que é o teorema do gradiente.

Corolário (Teorema de Green)**.** *Sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ duas funções diferenciáveis em x e y pelo menos até primeira ordem e definidas em um subconjunto aberto X do $\mathbb{R}^2$. Seja $\boldsymbol{\Sigma}$ uma região fechada em X delimitada por uma curva suave por partes $\partial\boldsymbol{\Sigma}$. Fazendo*

$$\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

temos

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Então

$$\int_{\partial\boldsymbol{\Sigma}} \omega = \oint_{\partial\boldsymbol{\Sigma}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

enquanto que

$$\int_{\boldsymbol{\Sigma}} \mathrm{d}\omega = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Logo o teorema generalizado de Stokes nos garante que

$$\oint_{\partial\boldsymbol{\Sigma}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\boldsymbol{\Sigma}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

que é o teorema de Green.

Corolário (Teorema de Gauss da divergência)**.** *Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial definido em um subconjunto aberto X de $\mathbb{R}^3$. Seja V uma variedade diferenciável volumétrica em X com coordenadas locais ortonormais $x^1 = u$, $x^2 = v$ e $x^3 = w$. O campo $\mathbf{F}$ pode ser dado por*

$$\mathbf{F} = F_1\hat{\mathbf{e_1}} + F_2\hat{\mathbf{e_2}} + F_3\hat{\mathbf{e_3}} \tag{118}$$

onde $\{\mathbf{e}_i\}$ forma uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, com $\mathbf{e}_i$ sendo a derivada normalizada do vetor posição em função de x^i. Esse campo pode ser escrito de maneira equivalente pela 2-forma

$$\omega = F_1\sigma_2\sigma_3 + F_2\sigma_3\sigma_1 + F_3\sigma_1\sigma_2 \tag{119}$$

onde $F_i = F_i(u,v,w)$ e o elemento $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ forma uma base ortonormal das 3-formas em $\mathbb{R}^3$. As formas diferenciais σ_i são as mesmas calculadas na seção 3.7 sobre o operador nabla em coordenadas ortonormais:

$$\sigma_1 = \lambda\,\mathrm{d}u$$
$$\sigma_2 = \mu\,\mathrm{d}v$$
$$\sigma_3 = \nu\,\mathrm{d}w$$

Segue da equação (119) que

$$\omega = (\mu\nu F_1)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + (\lambda\nu F_2)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}u + (\lambda\mu F_3)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

e então

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial(\mu\nu F_1)}{\partial u} + \frac{\partial(\lambda\nu F_2)}{\partial v} + \frac{\partial(\lambda\mu F_3)}{\partial w}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

ou

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left(\frac{\partial(\mu\nu F_1)}{\partial u} + \frac{\partial(\lambda\nu F_2)}{\partial v} + \frac{\partial(\lambda\mu F_3)}{\partial w}\right)\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Também vimos na seção 3.7 que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ *é o elemento de volume* $\mathrm{d}\tau$ *e que*

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\lambda\mu\nu}\left(\frac{\partial(\mu\nu F_1)}{\partial u} + \frac{\partial(\lambda\nu F_2)}{\partial v} + \frac{\partial(\lambda\mu F_3)}{\partial w}\right)$$

Logo

$$\mathrm{d}\omega = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}\tau$$

Por outro lado, vimos na seção 3.8 que o elemento de área infinitesimal $\mathrm{d}\mathbf{a}$ *quando a coordenada* x^3 *é constante é dado por*

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_3}}$$

Em geral, o elemento de área $\mathrm{d}\mathbf{a}$ *é dado por*

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \sigma_2\sigma_3\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_3\sigma_1\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_3}}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} &= (F_1\hat{\mathbf{e_1}} + F_2\hat{\mathbf{e_2}} + F_3\hat{\mathbf{e_3}})\cdot(\sigma_2\sigma_3\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_3\sigma_1\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_3}})\\ &= F_1\sigma_2\sigma_3 + F_2\sigma_3\sigma_1 + F_3\sigma_1\sigma_2\\ &= \omega\end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\partial V}\omega = \oint\!\!\!\oint_{\partial V}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}$$

e

$$\int_V \mathrm{d}\omega = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}\tau$$

Segue do teorema generalizado de Stokes que

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}\tau$$

que é o teorema de Gauss da divergência.

Corolário (Teorema de Stokes do rotacional). *Seja* $\mathbf{F}$ *um campo vetorial pelo menos uma vez diferenciável definida em um subconjunto aberto* X *de* $\mathbb{R}^3$ *dado pela equação* (118). *Seja* Σ *uma variedade diferenciável em* X *delimitada por uma curva suave por partes* $\partial\Sigma$. *Esse campo pode ser escrito de maneira equivalente usando a* 1*-forma*

$$\omega = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3$$

nas coordenadas curvilíneas ortonormais x^i *cuja base é* $\{\hat{\mathbf{e_1}}, \hat{\mathbf{e_2}}, \hat{\mathbf{e_3}}\}$. *Conforme vimos na seção 3.7, os elementos de comprimento são* σ_1, σ_2 *e* σ_3, *no que*

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sigma_1\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_2\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_3\hat{\mathbf{e_3}}$$

e então

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= (F_1\hat{\mathbf{e_1}} + F_2\hat{\mathbf{e_2}} + F_3\hat{\mathbf{e_3}})\cdot(\sigma_1\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_2\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_3\hat{\mathbf{e_3}})\\
&= F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3\\
&= \omega
\end{aligned}$$

Além disso, dado

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \lambda\,\mathrm{d}u\\
\sigma_2 &= \mu\,\mathrm{d}v\\
\sigma_3 &= \nu\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

temos

$$\omega = (\lambda F_1)\,\mathrm{d}u + (\mu F_2)\,\mathrm{d}v + (\nu F_3)\,\mathrm{d}w$$

e então

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial(\lambda F_1)}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial(\lambda F_1)}{\partial w}\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}u + \ldots + \left(\frac{\partial(\nu F_3)}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial(\nu F_3)}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}w$$

Já fizemos esse cálculo na seção 3.7 e resulta em

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\mu\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial v}(\nu F_3) - \frac{\partial}{\partial w}(\mu F_2)\Big)\sigma_2\sigma_3 + \frac{1}{\lambda\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial w}(\lambda F_1) - \frac{\partial}{\partial u}(\nu F_3)\Big)\sigma_3\sigma_1 +\\
\frac{1}{\lambda\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\Big)\sigma_1\sigma_2
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos também que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \frac{1}{\mu\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial v}(\nu F_3) - \frac{\partial}{\partial w}(\mu F_2)\Big)\hat{\mathbf{e_1}} + \frac{1}{\lambda\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial w}(\lambda F_1) - \frac{\partial}{\partial u}(\nu F_3)\Big)\hat{\mathbf{e_2}} +\\
\frac{1}{\lambda\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial u}(\mu F_2) - \frac{\partial}{\partial v}(\lambda F_1)\Big)\hat{\mathbf{e_3}}
\end{aligned}$$

e que

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \sigma_2\sigma_3\hat{\mathbf{e_1}} + \sigma_3\sigma_1\hat{\mathbf{e_2}} + \sigma_1\sigma_2\hat{\mathbf{e_3}}$$

Logo

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \mathrm{d}\omega$$

Finalmente temos que

$$\int_\Sigma \mathrm{d}\omega = \iint_\Sigma \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

e também

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Portanto o teorema generalizado de Stokes afirma que

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

que é o teorema de Stokes no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 4.4 (Integração por partes generalizada)**.** *Dado o teorema generalizado de Green*

$$\int_{\partial\mathbf{c}} \omega = \int_{\mathbf{c}} \mathrm{d}\omega$$

se fizermos $\omega = \mu \wedge \lambda$ *com* μ *sendo uma p-forma, obteremos*

$$\int_{\partial\mathbf{c}} \mu \wedge \lambda = \int_{\mathbf{c}} \mathrm{d}\mu \wedge \lambda + (-1)^p \mu \wedge \mathrm{d}\lambda$$

$$\int_{\partial\mathbf{c}} \mu \wedge \lambda = \int_{\mathbf{c}} \mathrm{d}\mu \wedge \lambda + (-1)^p \int_{\mathbf{c}} \mu \wedge \mathrm{d}\lambda$$

e então

$$\int_{\mathbf{c}} \mathrm{d}\mu \wedge \lambda = \left[\int_{\partial\mathbf{c}} \mu \wedge \lambda\right] - (-1)^p \int_{\mathbf{c}} \mu \wedge \mathrm{d}\lambda \tag{120}$$

A expressão (120) *é a forma generalizada das seguintes integrações por partes:*

1. $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\iiint_V \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f)\,\mathrm{d}\tau = \oiint_{\partial V} f\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} - \iiint_V f(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\,\mathrm{d}\tau$
3. $\displaystyle\iint_\Sigma f(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \oint_{\partial\Sigma} f\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \iint_\Sigma [\mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla} f)] \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$
4. $\displaystyle\iiint_V \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})\,\mathrm{d}\tau = \oiint_{\partial V} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}\tau$

A primeira é obtida ao fazer $\mu = f$, $\lambda = g$ *e* $\mathbf{c} = [a, b]$. *A segunda advém da escolha* $\mu = f$, $\lambda = A_1\sigma_2\sigma_3 + A_2\sigma_3\sigma_1 + A_3\sigma_1\sigma_2$ *e* $\mathbf{c}$ *um volume. Já a terceira* $\mathbf{c}$ *é uma superfície aberta,* $\mu = A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3$ *e* $\lambda = f$. *Por último, a quarta integração por partes pode ser obtida usando o mesmo* μ *do terceiro item além de fazer* $\lambda = B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3$ *e* $\mathbf{c}$ *um volume.*

4.6 Formas exatas e fechadas

Definição 4.7 (Formas fechadas)**.** *Uma forma diferencial* ω *em uma variedade diferencial* M *é dita fechada em um subconjunto* $X \subseteq M$ *se* $\mathrm{d}\omega = 0$ *em* X*.*

Definição 4.8 (Formas exatas)**.** *Uma forma diferencial* ω *em uma variedade diferencial* M *é dita ser exata em um subconjunto* $X \subseteq M$ *se existir alguma forma* α *em* X *tal que* $\mathrm{d}\alpha = \omega$*.*

Das definições segue imediatamente que toda forma exata é fechada, pois $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$. Porém nem toda forma fechada é exata, apesar de existirem condições suficientes para isso ser verdade conforme vimos na inversa do lema de Poincaré.

Teorema 4.4 (Integrais de formas fechadas)**.** *Se* ω *é uma* p*-forma fechada em* $F^p(M)$*, com* M *sendo uma variedade diferenciável, então dada duas* n*-cadeias simpliciais quaisquer* σ_1 *e* σ_2 *em* M *tais que* $\sigma_1 - \sigma_2$ *seja a fronteira de uma* $n+1$*-cadeia simplicial em* M *temos*

$$\int_{\sigma_1} \omega = \int_{\sigma_2} \omega$$

Demonstração. Seja Σ tal que $\sigma_1 - \sigma_2 = \partial\Sigma$. Então

$$\int_{\sigma_1} \omega - \int_{\sigma_2} \omega = \int_{\sigma_1 - \sigma_2} \omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\omega$$

Mas como ω é uma forma fechada em M, temos $\mathrm{d}\omega = 0$ em Σ e então

$$\int_{\sigma_1} \omega - \int_{\sigma_2} \omega = 0$$

■

Exemplo 4.5 (Integrais de caminho em campos conservativos)**.** *Seja* f *uma função escalar diferenciável pelo menos até primeira ordem definida em um conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *assim como dois pontos* p *e* q *em* X*. Sejam* $\mathbf{c}_1$ *e* $\mathbf{c}_2$ *dois caminhos suaves por partes que começam em* p *e terminam em* q*. Fazendo* $\omega = \mathrm{d}f$*, temos que* ω *é uma forma diferencial exata e portanto é também uma forma fechada. Uma vez que* $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ *é o caminho que vai do ponto* p *até ele próprio passando pelo caminho* $\mathbf{c}_1$ *e depois* $-\mathbf{c}_2$*, segue que* $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ *forma um caminho fechado e consequentemente é a borda de alguma superfície* Σ *em* X*. Então pelo teorema* (4.4) *temos que*

$$\int_{\mathbf{c}_1} \omega = \int_{\mathbf{c}_2} \omega$$

Mas também vimos que $\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ *e portanto*

$$\int_{\mathbf{c}_1} \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{c}_2} \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Isso significa que para um campo vetorial conservativo $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ *a integral de um ponto* p *até um ponto* q *independe do caminho. Esse resultado é equivalente ao teorema do gradiente,*

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(q) - f(p)$$

onde a integral de caminho só depende dos pontos inicial e final.

5 Aplicações de formas diferenciais na Física

5.1 Eletromagnetismo

Para obtermos as equações de Maxwell na notação de formas diferenciais, iremos começar com a mais fácil, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, onde $\mathbf{B}$ é o campo magnético. Definindo a forma

$$B = A \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + C \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + D \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t + F \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{121}$$

temos que

$$\mathrm{d}B = \left(-\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t$$

Fazendo $F = 0$, $A = B_x$, $C = B_y$ e $D = B_z$, temos

$$\mathrm{d}B = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t$$

Segue disso que a equação de Maxwell da não-existência de monopolos magnéticos é dado por

$$\mathrm{d}B = 0$$

onde

$$B = B_x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + B_y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + B_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t$$

Agora iremos verificar o que acontece se eliminarmos $\mathrm{d}t$ na equação (121). Seja λ definida por

$$\lambda_0 = B_x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + B_y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + B_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

de maneira que $B = \lambda_0 \, \mathrm{d}t$. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\lambda_0 &= (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \frac{\partial B_x}{\partial t} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + \frac{\partial B_y}{\partial t} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \frac{\partial B_z}{\partial t} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\partial B_x}{\partial t} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + \frac{\partial B_y}{\partial t} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \frac{\partial B_z}{\partial t} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Para obtermos a lei de Faraday $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, onde $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, devemos encontrar uma 2-forma λ_1 tal que

$$\mathrm{d}\lambda_1 = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \tag{122}$$

de maneira que $\mathrm{d}\lambda_0 + \mathrm{d}\lambda_1 = 0$, uma vez que essa equação de Maxwell nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Naturalmente λ_1 só pode ter as componentes do campo elétrico. Como não aparece nenhuma derivada temporal em $\mathrm{d}\lambda_1$, segue que em todas as 2-formas que compõe λ_1 possuem um $\mathrm{d}t$. Além disso, não aparecem derivadas parciais de E_x em relação a x e idem para as outras coordenadas, o que significa que deve ter uma forma $\mathrm{d}x$ onde há E_x e assim por diante. Então intuitivamente chegamos na expressão

$$\lambda_1 = E_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + E_y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + E_z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$

que cuja derivada exterior de fato reproduz (122). Portanto, denotando $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1$, temos que

$$\mathrm{d}\alpha = 0$$

com

$$\alpha = (E_x \,\mathrm{d}x + E_y \,\mathrm{d}y + E_z \,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}t + B_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + B_y \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + B_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

nos dá as equações homogêneas de Maxwell no sistema internacional (SI):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

No sistema gaussiano, devemos apenas substituir a coordenada t por ct em todos os passos além de considerar a forma diferencial $c\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(ct)$ como um elemento da base das 1-formas.

Ainda no sistema gaussiano (que nos será útil no contexto da relatividade restrita), as duas outras equações de Maxwell são as não-homogêneas:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_f \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\left(4\pi \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

onde ρ_f e $\mathbf{J}_f$ são respectivamente a densidade de cargas livres e a densidade de corrente de cargas livres, além de c ser a velocidade da luz no vácuo, $\mathbf{D}$ o deslocamento elétrico e $\mathbf{H}$ o campo magnético auxiliar.

Suponha que

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= D_x \hat{\mathbf{i}} + D_y \hat{\mathbf{j}} + D_z \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{H} &= H_x \hat{\mathbf{i}} + H_y \hat{\mathbf{j}} + H_z \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{J}_f &= J_{f_x} \hat{\mathbf{i}} + J_{f_y} \hat{\mathbf{j}} + J_{f_z} \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Então a lei de Ampére-Maxwell nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\left(4\pi J_{f_x} + \frac{\partial D_x}{\partial t}\right) &= 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\left(4\pi J_{f_y} + \frac{\partial D_y}{\partial t}\right) &= 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\left(4\pi J_{f_z} + \frac{\partial D_z}{\partial t}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Como agora as derivadas parciais em ct aparecem com sinal negativo, iremos definir uma 2-forma ψ dada por

$$\psi = -D_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - D_y \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - D_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

de modo que

$$\mathrm{d}\psi = (-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct - \frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct - \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct$$

Queremos encontrar a expressão

$$\begin{aligned}(4\pi\rho_f - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\left(4\pi J_{f_x} + \frac{\partial D_x}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct+\\ \left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\left(4\pi J_{f_y} + \frac{\partial D_y}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct+\\ \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\left(4\pi J_{f_z} + \frac{\partial D_z}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct = 0\end{aligned} \quad (123)$$

Assim como nas equações homogêneas de Maxwell, devemos somar uma 2-forma do tipo

$$H_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct + H_y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct + H_z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct$$

à 2-forma ψ para que apareça $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}$. Então se definirmos uma 2-forma β dada por

$$\beta = -D_x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - D_y \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - D_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + H_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct + H_y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct + H_z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct$$

então

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\beta = (-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t}\right]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct+\\ \left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}\right]\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct+\\ \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct\end{aligned}$$

Para obtermos (123), devemos somar uma 3-forma $4\pi\gamma$ dada por

$$4\pi\gamma = 4\pi\rho_f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \frac{1}{c}J_{f_x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct - \frac{1}{c}J_{f_y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct - \frac{1}{c}J_{f_z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct$$

ou equivalentemente

$$\gamma = \rho_f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - J_{f_x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t - J_{f_y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - J_{f_z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \quad (124)$$

de maneira que

$$\mathrm{d}\beta + 4\pi\gamma = 0$$

resulta em (123).

Portanto dada as formas diferenciais

$$\alpha = (E_x \,\mathrm{d}x + E_y \,\mathrm{d}y + E_z \,\mathrm{d}z) \,\mathrm{d}ct + B_x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + B_y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + B_z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
$$\beta = -D_x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z - D_y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x - D_z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + H_x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}ct + H_y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}ct + H_z \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}ct$$
$$\gamma = \rho_f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z - J_{f_x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}t - J_{f_y} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t - J_{f_z} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t$$

as equações

$$\mathrm{d}\alpha = 0 \tag{125}$$
$$\mathrm{d}\beta + 4\pi\gamma = 0 \tag{126}$$

resumem as quatro equações de Maxwell.

Aplicando a derivada exterior na equação (126), obtemos

$$\mathrm{d}\gamma = 0$$

que após recolocar dct em (124) essa equação se torna

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \,\mathrm{d}ct \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z - \frac{1}{c}\frac{\partial J_{f_x}}{\partial x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}ct - \frac{1}{c}\frac{\partial J_{f_y}}{\partial y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}ct - \frac{1}{c}\frac{\partial J_{f_z}}{\partial z} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}ct = 0$$

ou

$$\frac{1}{c}\left(-\frac{\partial \rho_f}{\partial t} - \frac{\partial J_{f_x}}{\partial x} - \frac{\partial J_{f_y}}{\partial y} - \frac{\partial J_{f_z}}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}ct = 0$$

e portanto

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}_f = 0$$

que é a equação de continuidade ou conservação local de cargas livres.

Uma vez que $\mathrm{d}\alpha = 0$, então pela inversa do lema de Poincaré em toda região estrelada do espaço-tempo existe alguma 1-forma λ tal que $\mathrm{d}\lambda = \alpha$ em toda essa região. Denotando

$$\lambda = A_x \,\mathrm{d}x + A_y \,\mathrm{d}y + A_z \,\mathrm{d}z + A_0 \,\mathrm{d}ct$$

e

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$$

temos que os termos de dλ que não envolvem derivadas em dct resultarão em 2-duas formas do tipo dx dy, dz dx e dy dz, e então concluiremos que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Já nos demais termos, obteremos

$$\frac{\partial A_0}{\partial x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}ct + \frac{\partial A_0}{\partial y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}ct + \frac{\partial A_0}{\partial z} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}ct - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}ct - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}ct - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}ct$$

ou

$$\left(\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct + \left(\frac{\partial A_0}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct + \left(\frac{\partial A_0}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct$$

que pela equação $\mathrm{d}\lambda = \alpha$ essa última expressão é igual a

$$E_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct + E_y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct + E_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct$$

e portanto chegamos nas equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\mathrm{d}t} &= E_x\\ \frac{\partial A_0}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\mathrm{d}t} &= E_y\\ \frac{\partial A_0}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\mathrm{d}t} &= E_z\end{aligned}$$

Denotando $A_0 = -V$ como sendo o potencial elétrico, essas expressões se reduzem a

$$-\boldsymbol{\nabla} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}$$

A forma diferencial α dada por

$$\alpha = (E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}ct + B_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + B_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + B_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

pode ser escrita na base do espaço co-vetorial das 2-formas no espaço tempo da seguinte forma:

$$\alpha = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{\mu} F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}u^\mu\,\mathrm{d}u^\nu$$

onde $\mathrm{d}u^1 = \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u^2 = \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}u^3 = \mathrm{d}z$ e $\mathrm{d}u^4 = \mathrm{d}ct$. Então os coeficientes $F_{\mu\nu}$ tomam a forma da matriz antissimétrica

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

que é a representação matricial do tensor eletromagnético em sua forma covariante.

5.1.1 Equações no vácuo

No vácuo temos $\rho_f = 0$, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Então as formas diferenciais α, β e γ ficam

$$\begin{aligned}&\alpha = (E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}ct + B_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + B_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + B_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\beta = -E_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - E_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - E_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + B_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct + B_y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct + B_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct\\ &\gamma = 0\end{aligned}$$

Escrevendo β pela expressão

$$\beta = \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{\mu} \tilde{F}_{\mu\nu}\, \mathrm{d}u^{\mu}\, \mathrm{d}u^{\nu}$$

temos que

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix}$$

que é a representação matricial do tensor dual de $F_{\mu\nu}$.

Definindo a norma das formas diferenciais como

$$\langle \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \rangle = \langle \mathrm{d}y, \mathrm{d}y \rangle = \langle \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \rangle = 1$$

$$\langle \mathrm{d}ct, \mathrm{d}ct \rangle = -1$$

e considerando que $\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}(ct)$ tem orientação positiva, então temos que essa base das 4-formas tem outras representações com orientação positiva dadas por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}(ct) &= \mathrm{d}x\, \mathrm{d}(ct)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \mathrm{d}y\, \mathrm{d}(ct)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}z\, \mathrm{d}(ct)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}(ct)\, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

dentre outras. Relembrando a equação (28) da seção 2.4 sobre o operador estrela, temos que se $\mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}x^K$ é uma base das n-formas de um espaço cotangente de dimensão n, então

$$*(\mathrm{d}x^H) = \langle \mathrm{d}x^K, \mathrm{d}x^K \rangle\, \mathrm{d}x^K$$

Isso significa que

$$*(\mathrm{d}x\, \mathrm{d}ct) = \langle \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \rangle\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

Mas

$$\langle \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle \mathrm{d}y, \mathrm{d}y \rangle & \langle \mathrm{d}y, \mathrm{d}z \rangle \\ \langle \mathrm{d}z, \mathrm{d}y \rangle & \langle \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \rangle \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

e então

$$*(\mathrm{d}x\, \mathrm{d}ct) = \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

Analogamente, temos

$$*(\mathrm{d}y\, \mathrm{d}ct) = \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x$$
$$*(\mathrm{d}z\, \mathrm{d}ct) = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Por outro lado

$$*(\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y) = \langle \mathrm{d}z\, \mathrm{d}ct, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}ct \rangle\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

$$\langle \mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct\rangle = \det\begin{bmatrix} \langle \mathrm{d}z, \mathrm{d}z\rangle & \langle \mathrm{d}z, \mathrm{d}ct\rangle \\ \langle \mathrm{d}ct, \mathrm{d}z\rangle & \langle \mathrm{d}ct, \mathrm{d}ct\rangle \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$$

ou seja,

$$*(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = -\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} *(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) &= -\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct \\ *(\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x) &= -\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} *\alpha &= E_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + E_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + E_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - B_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct - B_y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct - B_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct \\ &= -\beta \end{aligned}$$

Portanto as equações de Maxwell no vácuo ficam

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha &= 0 \\ \mathrm{d}(-*\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha &= 0 \\ \mathrm{d}(*\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(-\beta) = &\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial E_x}{\partial ct}\,\mathrm{d}ct\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial E_y}{\partial ct}\,\mathrm{d}ct\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \\ &\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial E_z}{\partial ct}\,\mathrm{d}ct\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial B_x}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct - \\ &\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial B_y}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct - \left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial B_z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(-\beta) = &\left(\frac{\partial E_x}{\partial ct} + \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct + \left(\frac{\partial E_y}{\partial ct} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct + \\ &\left(\frac{\partial E_z}{\partial ct} + \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct + \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Então $\mathrm{d}(*\alpha) = 0$ nos leva às equações

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{127}$$

Mas também

$$
\begin{aligned}
* \, \mathrm{d}(*\alpha) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_x \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_y \mathrm{d}y + \\
\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_z \mathrm{d}z - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}ct
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(*\,\mathrm{d}(*\alpha)) = \left[\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)\right]_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left[\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)\right]_y \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \\
+\left[\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)\right]_z \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial ct}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct - \\
-\left(\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial ct}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_y\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct - \\
-\left(\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial ct}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_z\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct
\end{aligned}
$$

Usando a equação (127) e sabendo que

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$-\frac{\partial}{\partial ct}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}\times\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) = -\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E}$$

temos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(*\,\mathrm{d}(*\alpha)) = \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B}\right]_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B}\right]_y \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \\
+\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B}\right]_z \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E}\right]_x \mathrm{d}x\,\mathrm{d}ct - \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E}\right]_y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}ct - \\
-\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E}\right]_z \mathrm{d}z\,\mathrm{d}ct
\end{aligned}
$$

Porém como $\mathrm{d}(*\alpha) = 0$ e o operador estrela é linear, segue que $\mathrm{d}(*\,\mathrm{d}(*\alpha))$ também é zero. Então, pela independência linear das duas-formas temos

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B} = \mathbf{0} \\
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

que são as equações de onda para **E** e **B**.

5.1.2 Teorema de Poynting

Agora sejam as formas diferenciais de um espaço vetorial tridimensional dadas por

$$\begin{aligned}\omega_1 &= E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z\\ \omega_2 &= B_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + B_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + B_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Denotando d' como a derivada exterior desconsiderando termos do tipo $\mathrm{d}ct$, temos

$$\begin{aligned}d'\omega_1 &= (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ d'\omega_2 &= (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Também denotando a derivada temporal de uma forma diferencial pela expressão

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_2 = \dot{\omega_2} = \frac{\partial B_x}{\partial t}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{\partial B_y}{\partial t}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{\partial B_z}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

segue que as equações homogêneas de Maxwell se tornam

$$\begin{aligned}d'\omega_1 &= -\frac{1}{c}\dot{\omega_2}\\ d'\omega_2 &= 0\end{aligned}$$

Para obtermos as outras duas equações, que são as não-homogêneas

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} &= 4\pi\rho_f\\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\left(4\pi\mathbf{J}_f + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

precisaremos calcular o divergente de $\mathbf{D}$ e o rotacional de $\mathbf{H}$, no que nos motiva a definir

$$\begin{aligned}\omega_3 &= H_x\,\mathrm{d}x + H_y\,\mathrm{d}y + H_z\,\mathrm{d}z\\ \omega_4 &= D_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + D_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + D_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}d'\omega_3 &= (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H})_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H})_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H})_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ d'\omega_4 &= (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Como a fórmula para gerar o rotacional resulta em duas-formas, também iremos definir

$$\omega_5 = J_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + J_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + J_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Então as equações não-homogêneas de Maxwell ficam

$$\begin{aligned}d'\omega_3 &= \frac{4\pi}{c}\omega_5 + \frac{1}{c}\dot{\omega_4}\\ d'\omega_4 &= *(4\pi\rho_f)\end{aligned}$$

onde as normas $\langle \mathrm{d}x, \mathrm{d}x\rangle$, $\langle \mathrm{d}y, \mathrm{d}y\rangle$ e $\langle \mathrm{d}z, \mathrm{d}z\rangle$ são todas iguais a $+1$.

O vetor de Poynting na notação vetorial é dado por

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Vimos que o produto vetorial pode ser representado pelo produto exterior das 1-formas. Nesse caso temos

$$S_x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + S_y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + S_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{c}{4\pi}\omega_1 \wedge \omega_3$$

Agora

$$\begin{aligned} d'(\omega_1 \wedge \omega_3) &= d'\omega_1 \wedge \omega_3 \;+\; (-1)^1(\omega_1 \wedge d'\omega_3) \\ &= -\frac{1}{c}\dot{\omega_2} \wedge \omega_3 \;-\; \omega_1 \wedge \left(\frac{4\pi}{c}\omega_5 + \frac{1}{c}\dot{\omega_4}\right) \\ &= -\frac{1}{c}\dot{\omega_2} \wedge \omega_3 \;-\; \frac{4\pi}{c}\omega_1 \wedge \omega_5 \;-\; \frac{1}{c}\omega_1 \wedge \dot{\omega_4} \end{aligned}$$

Mas por outro lado

$$d'(\omega_1 \wedge \omega_3) = * \left(\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S}\right)$$

e então

$$* \left(\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S}\right) + \frac{1}{c}\dot{\omega_2} \wedge \omega_3 \;+\; \frac{4\pi}{c}\omega_1 \wedge \omega_5 \;+\; \frac{1}{c}\omega_1 \wedge \dot{\omega_4} = 0 \tag{128}$$

Também vimos anteriormente que o produto escalar pode ser representado pelo produto exterior de uma 1-forma com uma 2-forma. Então a equação (128) nos fornece

$$4\pi\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = 0 \tag{129}$$

que é o teorema de Poynting.

Em um material em repouso com comportamento dielétrico e de magnetização linear temos

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H} \end{aligned}$$

onde ϵ é a permissividade elétrica e μ a permeabilidade magnética do material, ambos constantes no tempo. Substituindo essas expressões em (129) e dividindo por 4π iremos obter

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \frac{\mu}{4\pi}\dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\epsilon}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0$$

Mas

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \\ \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H} &= \frac{1}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t} \end{aligned}$$

e então
$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}(\mu H^2 + \epsilon E^2)\right) = 0$$
Denotando
$$u = \frac{1}{8\pi}(\mu H^2 + \epsilon E^2)$$
como sendo a densidade de energia nos campos eletromagnéticos, concluímos que
$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

5.2 Termodinâmica

5.2.1 Relações de Maxwell

Os potenciais termodinâmicos molares são dados por

$$\begin{aligned}
u(s,v) &= \int T\,\mathrm{d}s - p\,\mathrm{d}v \\
f(T,v) &= u - Ts \\
h(s,p) &= u + pv \\
g(T,v) &= u + pv - Ts
\end{aligned}$$

onde f é a energia livre de Helmholtz, h a entalpia e g a energia livre de Gibbs. A derivada exterior da energia interna molar é dada por

$$\mathrm{d}u = T\,\mathrm{d}s - p\,\mathrm{d}v$$

enquanto que para os demais temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}u - s\,\mathrm{d}T - T\,\mathrm{d}s \\
\mathrm{d}f &= -s\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}h &= \mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}v \\
\mathrm{d}h &= T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}g &= \mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}v - s\,\mathrm{d}T - T\,\mathrm{d}s \\
\mathrm{d}g &= v\,\mathrm{d}p - s\,\mathrm{d}T
\end{aligned}$$

Pelo lema de Poincaré temos $\mathrm{d}(\mathrm{d}u) = 0$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}h) = 0$, e $\mathrm{d}(\mathrm{d}g) = 0$. Mas por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}u) &= \left(\frac{\partial T}{\partial s}\Big|_v \mathrm{d}s + \frac{\partial T}{\partial v}\Big|_s \mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s - \left(\frac{\partial p}{\partial s}\Big|_v \mathrm{d}s + \frac{\partial p}{\partial v}\Big|_s \mathrm{d}v\right)\mathrm{d}v \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial v}\Big|_s + \frac{\partial p}{\partial s}\Big|_v\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$\left.\frac{\partial T}{\partial v}\right|_s = -\left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_v \tag{130}$$

onde o traço vertical indica a variável que é constante durante a derivação parcial. A equação (130) é uma das quatro relações de Maxwell. As demais se seguem da mesma maneira:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{d}f) &= -\left(\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_v \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T \mathrm{d}v\right)\mathrm{d}T - \left(\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial p}{\partial v}\right|_T \mathrm{d}v\right)\mathrm{d}v \\ &= \left(\left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T - \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v\right)\mathrm{d}T\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}h) = \left(\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_s - \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_p\right)\mathrm{d}p\,\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}g) = \left(\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p + \left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T\right)\mathrm{d}T\,\mathrm{d}p$$

e então

$$\left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_v \tag{131}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_s = \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_p \tag{132}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p = -\left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T \tag{133}$$

Pela distribuição da derivada exterior, também temos

$$\mathrm{d}T\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}p\,\mathrm{d}v$$

5.2.2 Propriedades dos materiais

Dado um material, na termodinâmica definimos as grandezas

$$c_v = T\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_v \qquad c_p = T\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_p \qquad \kappa_T = -\frac{1}{v}\left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T \qquad \alpha = \frac{1}{v}\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p$$

onde c_v, c_p, κ_T e α são respectivamente a capacitância térmica molar a volume constante, à pressão constante, compressibilidade à temperatura constante e o coeficiente de expansão térmica.

A forma $\mathrm{d}s$ em termos da temperatura e do volume molar é dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_v \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T \mathrm{d}v \\ &= \frac{c_v}{T}\,\mathrm{d}T + \left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T \mathrm{d}v \end{aligned}$$

Mas escrevendo dv em termos da temperatura e da pressão temos

$$\mathrm{d}v = \left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p$$

e então

$$\mathrm{d}s = \left(\frac{c_v}{T} + \left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T \cdot \left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p\right) \mathrm{d}T + \left(\left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T \cdot \left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T\right) \mathrm{d}p$$

Por outro lado, escrevendo ds diretamente em termos da temperatura e da pressão temos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= \left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_p \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p \\ &= \frac{c_p}{T}\,\mathrm{d}T + \left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T \mathrm{d}p\end{aligned}$$

Como as formas dT e dp são independentes, comparando as expressões chegamos nas equações

$$\frac{c_p}{T} = \frac{c_v}{T} + \left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T \cdot \left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p \tag{134}$$

e

$$\left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T = \left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T \cdot \left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T \tag{135}$$

Na equação (134) identificamos

$$\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p = v \cdot \alpha \tag{136}$$

Já na equação (135), temos que

$$\left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T = \frac{\left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T}{\left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T}$$

Usando uma das relações de Maxwell (equação 133), obtemos

$$\left.\frac{\partial s}{\partial v}\right|_T = -\frac{\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p}{\left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T} = \frac{\left.\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p}{\left.-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T} = \frac{\alpha}{\kappa_T} \tag{137}$$

Substituindo (136) e (137) em (134), concluiremos que

$$\frac{c_p}{T} = \frac{c_v}{T} + v\frac{\alpha^2}{\kappa_T}$$

ou equivalentemente

$$c_p = c_v + Tv\frac{\alpha^2}{\kappa_T} \tag{138}$$

A equação (138) traz uma relação entre c_p, c_v, α e κ_T, o que indica que pelo menos um desses parâmetros não é independente dos demais. Usando a segunda lei da termodinâmica é possível mostrar que c_p, c_v e κ_T são necessariamente positivos. Portanto da relação (138) também podemos concluir que $c_p \geqslant c_v$.

De maneira análoga, começamos com

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= \frac{\partial v}{\partial p}\Big|_s \mathrm{d}p + \frac{\partial v}{\partial s}\Big|_p \mathrm{d}s \\ &= -v \cdot \kappa_s \, \mathrm{d}p + \frac{\partial v}{\partial s}\Big|_p \mathrm{d}s \end{aligned}$$

onde κ_s é a compressibilidade à entropia constante, dada por

$$\kappa_s = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}\Big|_s$$

Agora fazemos uma mudança para as coordenadas termodinâmicas para p e T, obteremos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= -v \cdot \kappa_s \, \mathrm{d}p + \frac{\partial v}{\partial s}\Big|_p \left(\frac{\partial s}{\partial p}\Big|_T \mathrm{d}p + \frac{\partial s}{\partial T}\Big|_p \mathrm{d}T \right) \\ &= \left(-v \cdot \kappa_s + \frac{\partial v}{\partial s}\Big|_p \cdot \frac{\partial s}{\partial p}\Big|_T \right) \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\Big|_p \cdot \frac{\partial s}{\partial T}\Big|_p \right) \mathrm{d}T \end{aligned}$$

Mas também

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= \frac{\partial v}{\partial p}\Big|_T \mathrm{d}p + \frac{\partial v}{\partial T}\Big|_p \mathrm{d}T \\ &= -v \cdot \kappa_T \, \mathrm{d}p + \frac{\partial v}{\partial T}\Big|_p \mathrm{d}T \end{aligned}$$

Comparando as duas últimas equações, temos

$$-v \cdot \kappa_T = -v \cdot \kappa_s + \frac{\partial v}{\partial s}\Big|_p \cdot \frac{\partial s}{\partial p}\Big|_T \tag{139}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial T}\Big|_p = \frac{\partial v}{\partial s}\Big|_p \cdot \frac{\partial s}{\partial T}\Big|_p \tag{140}$$

De (140) temos

$$\frac{\partial v}{\partial s}\Big|_p = \frac{\frac{\partial v}{\partial T}\Big|_p}{\frac{\partial s}{\partial T}\Big|_p} = Tv \frac{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}\Big|_p}{T\frac{\partial s}{\partial T}\Big|_p} = Tv\frac{\alpha}{c_p}$$

Usando (133) em (139), obteremos

$$\begin{aligned} -v \cdot \kappa_T &= -v \cdot \kappa_s - Tv\frac{\alpha}{c_p} \cdot \frac{\partial v}{\partial T}\Big|_p \\ -v \cdot \kappa_T &= -v \cdot \kappa_s - Tv\frac{\alpha}{c_p} \cdot \alpha v \end{aligned}$$

e então

$$\kappa_T = \kappa_s + Tv\frac{\alpha^2}{c_p} \tag{141}$$

Isso significa que, pela segunda lei da termodinâmica, temos $\kappa_T \geqslant \kappa_s$.

Por fim, de (141) temos

$$(\kappa_T - \kappa_s)c_p = Tv\alpha^2$$

Por outro lado, a equação (138) nos leva a

$$(c_p - c_v)\kappa_T = Tv\alpha^2$$

e consequentemente

$$(\kappa_T - \kappa_s)c_p = (c_p - c_v)\kappa_T$$

$$-\kappa_s c_p = -c_v \kappa_T$$

ou então

$$\frac{\kappa_s}{\kappa_T} = \frac{c_v}{c_p} \tag{142}$$

As grandezas em que temos mais facilidade de medir são a expansão térmica α, a capacidade térmica molar à pressão constante c_p e a compressibilidade à temperatura constante κ_T. Usando

$$c_v = c_p - Tv\frac{\alpha^2}{\kappa_T}$$

obtemos a capacidade térmica molar com volume constante. E então, utilizando a equação (142) obtemos a compressibilidade à entropia constante κ_s.